

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky



Napjatostní a deformační analýza okrajové části opěrného válce stolice kvarto

The Stress and Strain Analysis of the Backup Roll Chamfer of the 4-High Rolling Mill

Student:

Bc. Jan BZONEK

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Petr FERFECKI, Ph.D.

Datum odevzdání práce:

15.5.2017

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra aplikované mechaniky

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Jan Bzonek**
Studijní program: **N2301 Strojní inženýrství**
Studijní obor: **3901T003 Aplikovaná mechanika**
Téma: **Napjatostní a deformační analýza okrajové části opěrného válce stolice kvarto**
The Stress and Strain Analysis of the Backup Roll Chamfer of the 4-High Rolling Mill
Jazyk vypracování: **čeština**

Zásady pro vypracování:

1. Vypracujte literární řešení: (i) mechanismů přenosu tepla, (ii) numerického řešení kontaktních úloh a (iii) optimalizace tvaru u válců válcovacích stolic.
2. Provedte srovnání numerického a analytického výpočtu Hertzova kontaktu dvou válců.
3. Realizujte výpočetní simulace kontaktního problému válcovací stolice, a to pomocí různých výpočetních systémů (ANSYS, COMSOL, MatSol, ...) a kontaktních algoritmů (metoda penalty, metoda Lagrangeových multiplikátorů a rozšířená Lagrangeova metoda).
4. Zkoumejte vliv teplotních polí na napjatostní a deformační analýzu okrajové části opěrného válce.
5. Provedte optimalizační studii tvaru okrajové části opěrného válce.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] J. Elfmark: Tváření kovů, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1992, 524 s.
- [2] B. Wrigh: Thermal Behaviour of Work Rolls in the Hot Mill Rolling Process, Cardiff University March 2012, Ph.D. disertace, 404 s.
- [3] L. M. Galantucci, L. Tricarico: Thermo-mechanical simulation of a rolling proces with an FEM approach, Journal of Materials Processing Technology 92-93 1999, str. 494-501.
- [4] P. Ferfecki, F. Fojtik, R. Halama, D. Hajduk: Numerické zkoumání vlivu tvaru okrajové části opěrného válce stolice kvarto na napjatost a porušování, Hutnické listy LXII(2) 2010, str. 72-77.
- [5] V. L. Popov: Contact Mechanics and Friction, Physical Principles and Applications, Springer 2010.
- [6] A. C. Fischer-Cripps: Introduction to Contact Mechanics, Springer 2007, 221 s

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Petr Ferfecki, Ph.D.**

Datum zadání: 09.12.2016

Datum odevzdání: 15.05.2017



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty



Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a použil jsem literárních pramenů a informací, které cituji a uvádím v seznamu použité literatury.

V Ostravě 15.5.2017

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě 15.5.2017



Podpis studenta

Jméno a příjmení studenta:

Jan Bzonek

Adresa trvalého pobytu studenta:

Slatina 76,
74293 Slatina

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu diplomové práce panu **Ing. Petru Ferneckému, Ph.D.** za jeho vstřícnost, odborné rady, připomínky a předané vědomosti, které pro mě byly cennou inspirací a zkušeností, jež jistě využiji v budoucím profesním životě.

Dále bych rád poděkoval panu **Ing. Petru Eliášovi**, který mi z pozice vrchního mistra tratě 3,5 Kvarto společnosti **VÍTKOVICE STEEL, a.s.** umožnil zabývat se danou problematikou, projít si provozem a jeho předané zkušenosti významnou měrou přispěly k finální podobě této práce.

Rovněž bych rád poděkoval všem zaměstnancům **Katedry aplikované mechaniky** za jejich vřelý přístup ke svým studentům a ochotu vždy pomoci.

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

BZONEK, J. *Napjatostní a deformační analýza okrajové části opěrného válce stolice kvarto : diplomová práce*. Ostrava : VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2017, 75 s. Vedoucí práce: Ferfecki, P.

Diplomová práce se zabývá napjatostní a deformační analýzou okrajové části opěrného válce stolice kvarto pomocí metody konečných prvků. Téma vzniklo na základě požadavku společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. V úvodu práce jsou shrnuty základní charakteristiky válcovacího procesu, materiálové charakteristiky válců a jsou rozebrány způsoby zatížení válcovací stolice. Dále jsou rozebrány způsoby řešení kontaktních úloh a provedeno řešení 2D úlohy (Hertzova teorie, MKP). Pomocí výpočetního modelování je provedena strukturální a strukturálně-teplotní analýza prostorové soustavy a následně je provedena optimalizace za účelem zvýšení životnosti válců.

ANNOTATION OF MASTER'S THESIS

BZONEK, J. *The Stress and Strain Analysis of the Backup Roll Chamfer of the 4-High Rolling Mill : master's thesis*. Ostrava : VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2017, 75 s. Thesis head: Ferfecki, P.

Master's thesis is focused on the stress and strain analysis of the backup roll chamfer of the 4-high rolling mill by finite element analysis. The theme was created on the basis of requirements VÍTKOVICE STEEL, a.s. At the beginning of the thesis are summarized the basic characteristics of the rolling process, the material characteristics of the cylinders and the ways of loading the rolling mill. There are also discussed ways of solving contact problems and solving 2D problems (Hertz theory, FEM). For structural and structural-thermal analysis was used computational modelling of the spatial system and lastly, optimization is used for increase the life of the cylinders.

Obsah

1	Použitá označení	8
2	Úvod	11
3	Úvod do technologie válcování	13
3.1	Válcovací stolice společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s.	15
3.2	Rozbor zatížení válců v průběhu válcovacího procesu	20
4	Kontaktní úloha	22
4.1	Kontaktní algoritmy	23
4.1.1	Ansys Workbench 15.0	25
4.1.2	MSC Patran/Nastran	26
4.1.3	MSC Marc Mentat	28
4.2	Hertzův kontakt dvou válců	29
5	Analýza rovinné úlohy kontaktu dvou válců	32
5.1	Analytické řešení (Hertzova teorie)	33
5.2	Numerické řešení (Ansys Workbench, COMSOL Multiphysics)	33
5.3	Porovnání výsledků	36
6	Analýza prostorové soustavy válců	38
6.1	Statická analýza (Ansys, Inc., MSC Software)	40
6.1.1	Studie vlivu materiálových a třecích parametrů	43
6.1.2	Studie vlivu použitých kontaktních metod	43
6.2	Analýza mezních stavů soustavy	46
7	Analýza prostorové soustavy válců se zahrnutím teplotních polí v provoalku	52
7.1	Mechanismy přenosu tepla	52
7.1.1	Kondukce	53
7.1.2	Konvekce	55
7.1.3	Radiace	55
7.2	Problematika řešení multifyzikálních problémů v prostředí Ansys Workbench	56
7.2.1	Testovací úloha	58
7.3	Strukturálně-teplotní analýza prostorové soustavy	61
8	Optimalizace tvarového zakončení opěrného válce	66
8.1	Úvod do optimalizačních metod	66
8.2	Optimalizace tvarového zakončení opěrného válce	67
8.3	Modifikace tvarového zakončení opěrného válce dle požadavků VÍTKOVICE STEEL, a.s.	69
8.4	Modifikace tvarového zakončení	70
9	Posouzení mezního stavu optimalizovaného tvaru zakončení opěrného válce	71
10	Závěr	72
11	Literární zdroje	72
12	Použité obrázky	75

1 Použitá označení

ZNAČENÍ	POPIS VELIČINY	JEDNOTKA
E	Youngův modul pružnosti v tahu	[Pa]
F	Zatěžující síla	[N]
F_{lin}	Zatěžující normálová (liniová) síla	[N·m ⁻¹]
F_{n_pen}	Vektor normálových složek tlakových sil (Pokutový přístup)	[N]
F_{n_lag}	Vektor normálových složek tlakových sil (Lagrangeova metoda)	[N]
F_{pro}	Protiohybová síla	[N]
F_t	Vektor tangenciálních složek tlakových sil	[N]
F_{val}	Válcovací síla	[N]
G_i	Modul pružnosti ve smyku válců, $i = 1,2$	[Pa]
L	Tloušťka kulové vrstvy zakončení opěrného válce	[m]
L_v	Délka válce	[m]
Q	Teplo	[J]
Q_z	Zářivý tok	[W·m ⁻¹]
R	Poloměr kulové vrstvy	[m]
R_i	Poloměr válce, $i = 1,2$	[m]
R_k	Kontaktní tepelný odpor	[K·m ² ·W ⁻¹]
S	Plocha	[m ²]
T	Teplota	[°C]
T_c	Teplota plochy zvolené jako "contact"	[°C]
TCC	Kontaktní tepelná vodivost	[W·K ⁻¹]
T_0	Počáteční teplota	[°C]
T_{ref}	Referenční teplota	[°C]
T_t	Teplota plochy zvolené jako "target"	[°C]
T_σ	Tenzor napětí	[Pa]
a	Velikost hlavní poloosy elipsy	[m]
a_t	Teplotní vodivost	[m·s ⁻¹]
b	Velikost hlavní osy elipsy	[m]
c_p	Měrná tepelná kapacita	[J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹]
d	Délka kuželové vrstvy tvarového zakončení opěrného válce	[m]
dT	Přírůstek teploty	[°C]
f	Součinitel tření	[-]

ZNAČENÍ	POPIS VELIČINY	JEDNOTKA
h	Charakteristický rozměr kulové vrstvy ve vertikálním směru	[m]
k_{n_lag}	Matice normálové kontaktní tuhosti (Lagrangeova metoda)	[N·m ⁻¹]
k_{n_pen}	Matice normálové kontaktní tuhosti (Pokutový přístup)	[N·m ⁻¹]
k_t	Matice tangenciální kontaktní tuhosti	[N·m ⁻¹]
p	Kontaktní tlak	[Pa]
p_{max}	Maximální velikost kontaktního tlaku	[Pa]
p_n	Normálová složka tlakové síly	[N]
p_s	Tangenciální složka tlakové síly	[N]
q	Velikost vedlejší poloosy elipsy	[m]
q_t	Hustota tepelného toku	[W·m ⁻²]
q_w	Hustota tepelného toku nedokonalého styku	[W·m ⁻²]
u	Posuv ve směru x	[m]
v	Posuv ve směru y	[m]
w	Posuv ve směru z	[m]
w_i	Přiblížení středů válců, $i = 0,1,2$	[m]
x_{p_lag}	Vektor penetrace (Lagrangeova metoda)	[m]
x_{p_pen}	Vektor penetrace (Pokutový přístup)	[m]
x_s	Vektor posuvů	[m]
z_i	Zploštění válců, $i = 1,2$	[m]
z_{max}	Poloha vzniku maximální hodnoty smykového napětí	[m]
α	Součinitel přestupu tepla	[W·m ⁻² ·K ⁻¹]
α_L	Součinitel délkové teplotní roztažnosti	[K ⁻¹]
α_0	Úhel záběru	[°]
α_t	Teoretický součinitel koncentrace napětí	[-]
ΔT	Změna teploty	[°C]
ε	Emisivita (poměrná zářivost)	[-]
ε_x	Poměrná podélná deformace ve směru x	[-]
ε_y	Poměrná podélná deformace ve směru y	[-]
ε_z	Poměrná podélná deformace ve směru z	[-]
λ	Vektor Lagrangeových multiplikátorů	[N]
λ_i	Součinitel tepelné vodivosti, $i = 1,2$	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]
λ_t	Součinitel tepelné vodivosti	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]
μ	Poissonovo číslo	[-]

ZNAČENÍ	POPIS VELIČINY	JEDNOTKA
ρ	Hustota	[kg·m ⁻³]
σ_{HMH}	Redukované napětí dle HMH	[Pa]
σ_0	Stefan - Boltzmannova konstanta	[W·m ⁻² ·K ⁻⁴]
σ_x	Normálové napětí ve směru x	[Pa]
σ_y	Normálové napětí ve směru y	[Pa]
σ_z	Normálové napětí ve směru z	[Pa]
τ	Čas	[s]
τ_{max}	Maximální velikost smykového napětí	[Pa]
τ_{xy}	Smykové napětí v rovině xy	[Pa]
τ_{xz}	Smykové napětí v rovině xz	[Pa]
τ_{yz}	Smykové napětí v rovině yz	[Pa]
φ	Úhel sklonu kuželové vrstvy tvarového zakončení válce	[°]

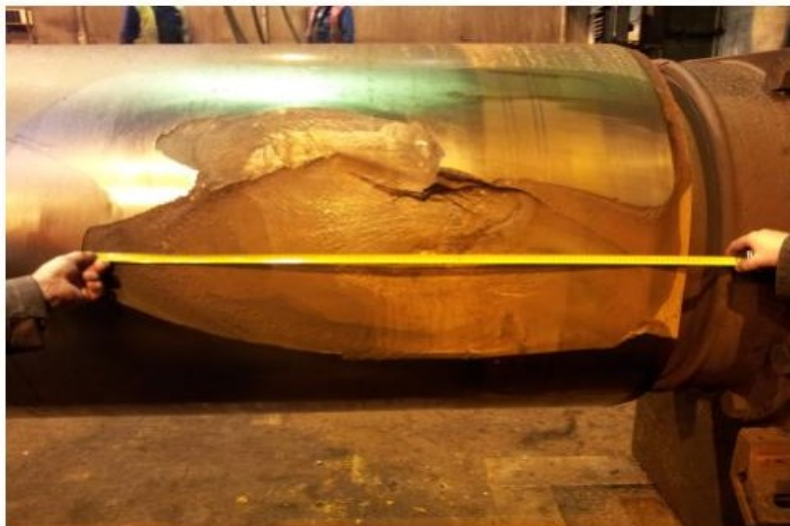
2 Úvod

Válcování je způsob tváření kovu tlakem mezi dvěma otáčejícími se válci. Válcováním lze vyrábět dlouhé polotovary stejného průřezu v celé délce. Stroj určený k tváření materiálu se nazývá válcovací stolice. Tyto stroje byly využívány již od 18. století a jsou významným členem hutního průmyslu dodnes.

Válcovací stolice je tvořena z válců, mezi nimiž prochází válcovaný materiál. Tyto válce se nazývají pracovní.

Kvalita válcovacího procesu závisí na tlaku, který je na válce vyvíjen, čím je tlak vyšší, tím je válcovací proces účinnější. Doporučuje se, aby pracovní válce měly co nejmenší průměr, proto postupem času přešly válcovací stolice ke konstrukčnímu uspořádání, které zahrnuje pracovní válce menšího průměru, opírající se o opěrné válce většího průměru, čímž je významně zvýšená tuhost válcovací stolice. Opěrné válce zachycují svislou složku tlakových sil a zabraňují ohybu pracovních válců, díky čemuž je výrazně zvýšená kvalita výsledného produktu válcovacího procesu.

Na opěrné válce jsou kladeny nároky na jejich vysokou tuhost a velkou životnost. Životnost je zde chápána jako počet odválcovaných tun za životnost. Vlivem zatížení válců a vzniku kontaktních tlaků při interakci pracovního a opěrného válce (resp. pracovního válce a provalku) dochází k překročení mezních hodnot materiálu, což vede k iniciaci trhlin a následně ke vzniku poruch (*Obrázek 1*).



Obrázek 1 - Opotřebení válců

Za předpokladu, že jde o dva nekonečně dlouhé válce se srovnatelnými materiálovými parametry zatížené liniovou silou a mezi válci nedochází ke tření, lze kontaktní napětí mezi válci odvodit podle Hertzovy teorie [10].

Z Hertzovy teorie vyplývá, že k nejpravděpodobnějšímu výskytu poruchy dochází v místě vzniku maximálního smykového napětí, které vzniká v určité hloubce pod povrchem. V těchto místech poté dochází k iniciaci a šíření trhlin.

V případě, že je válcovací stolice vybavena pracovními i opěrnými válci, je možné pozorovat, že největšímu opotřebení podléhá okrajová část opěrného válce. Změnu koncentrace napětí v okrajové části opěrného válce lze ovlivnit úpravou geometrie tvarového zakončení. Pro popis napjatosti se zahrnutím vlivu tvarového zakončení opěrného válce musí být respektován skutečný tvar zakončení válce. K analýze prostorové soustavy musí být využita Metoda konečných prvků [1].

Téma práce vzniklo na základě požadavků společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s., která uvedený typ válcovací stolice využívá v každodenním pracovním procesu při výrobě plechů různých tloušťek válcováním za tepla.

Cílem práce je napjatostní a deformační analýza současného stavu bez vlivu teplotního gradientu v provalku, dále se zahrnutím teplotního vlivu a v poslední fázi je proveden optimalizační proces, jehož snahou je nalézt takové tvarové zakončení válce, které by vedlo ke snížení opotřebení opěrného válce a tím ke zvýšení životnosti.

Chování soustavy válců je testováno na běžnou velikost zatížení, která byla změřena během válcovacího procesu a dále je posouzen mezní stav soustavy, tedy analýza soustavy při maximálním možném zatížení válcovacími a protiohybovými silami.

Problematika je řešena cestou výpočtového modelování s využitím 3D modelu primárně v softwaru Ansys Workbench. Dále je provedena analýza v konečno-prvkových programech společnosti MSC Software a výsledky jsou porovnány. Práce se rovněž zabývá základními typy kontaktních algoritmů včetně analytického řešení rovinné úlohy Hertzovou teorií a porovnáním s numerickým řešením 2D úlohy.

Do práce jsou také zahrnutá doporučení při řešení kontaktních úloh a je popsán postup řešení multifyzikálních (teplotně-strukturálních) úloh v prostředí Ansys Workbench s využitím APDL příkazů.

Obsah práce s uvedením geometrických parametrů, materiálových parametrů, zatěžujících sil a dosažených výsledků je na přání společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. neveřejný a je zařazen do technické zprávy [17].

3 Úvod do technologie válcování

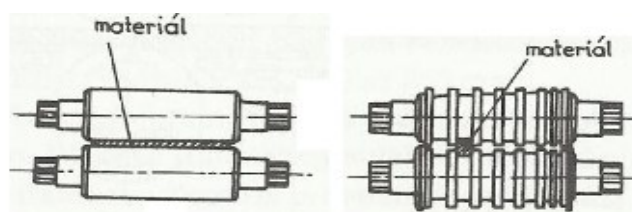
V hutním průmyslu hraje válcování materiálu velmi důležitou roli. Jde o způsob tváření materiálu, jež je ve své podstatě nejrychlejší, nejvýkonnější, velmi plynulý a hospodárný.

Válcuje se ocel, neželezné kovy a jejich slitiny. Válcování je svou podstatou řazeno do tzv. těžkého průmyslu, kdy samotné válcování je jen segment dlouhého tvářecího procesu.

V první fázi bývají v ocelárně vytvořeny ingoty, z kterých je následně vytvořen polotovar, tzv. předvalek, který se dále válcuje na hotový vývalek.

Válcovat se může za studena nebo za tepla. Válcováním za tepla se mechanické vlastnosti mění jen málo, ale sloh oceli se zjemňuje, stává se vláknitým a houževnatým. Tvářením za studena se mechanické vlastnosti oceli podstatně mění. Pevnost a tvrdost se značně zvětšuje, nicméně tvárnosti ubývá. Při tváření za studena vzniká vnitřní pnutí, které je následně odstraněno žiháním [2].

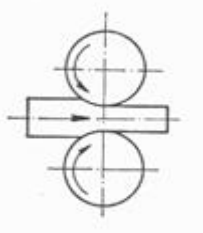
Úkolem válcování je vyrobit ze surového ingotu hotový vývalek žádaného profilu. Je to spojeno se značným úběrem průřezu, se změnou původního tvaru a s mnohonásobným zvětšením délky polotovaru. Změny průřezu je dosaženo úběrem jeho výšky, a to buď přibližováním horního válce po každém průchodu ve směru svislém, jsou-li oba válce hladké, nebo tzv. kalibrováními válci se zářezy (*Obrázek 2*), přičemž se u každého kalibru zmenšuje jeho výška. Válce jsou litinové nebo ocelové různých průměrů [3].



Obrázek 2 - Typy válců – hladké (vlevo), kalibrované (vpravo) [1]

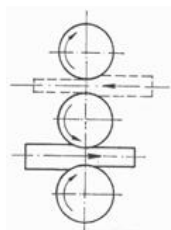
Stroje, jimiž je materiál válcován se mohou dělit na [2]

- stolice duo – jednosměrné, otáčejí-li se válce jedním směrem, či reverzní, otáčejí-li se válce v obou směrech a směr otáčení se mění po každém průchodu (*Obrázek 3*),

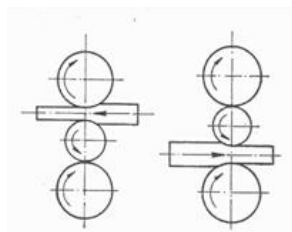


Obrázek 3 - Stolice duo [1]

- stolice trio – má tři válce nad sebou a všechny jsou poháněny. Materiál prochází mezi spodním a středním válcem a po průchodu dojde ke zvednutí stolu a materiál se vrací mezi středním a horním válcem (Obrázek 4),

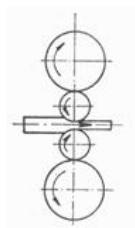

Obrázek 4 - Stolice trio^[1]

- stolice Lauthovo trio – střední válec není poháněn a otáčí se vlivem tření. Používá se při válcování tenkých a středních plechů (Obrázek 5),



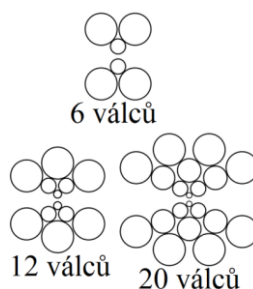
Obrázek 5 - Stolice Lauthovo trio [1]

- stolice kvarto – skládá se ze dvou pracovních a dvou opěrných válců. Pracovní válce jsou poháněny, zatímco opěrné se otáčejí jen vlivem tření. Materiál prochází válcovací mezerou mezi dvěma pracovními válci (Obrázek 6),



Obrázek 6 - Stolice kvarto [1]

- víceválcové stolice – v dnešní době se využívají i víceválcové stolice (až 20ti válcové), které jsou svým uspořádáním schopny zachycovat jak svislé, tak vodorovné složky tlakových sil (Obrázek 7).



Obrázek 7 - Víceválcové stolice [1]

3.1 Válcovací stolice společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s.

Společnost VÍTKOVICE STEEL, a.s. využívá válcovací stolič 3,5 Kvarto (maximální šířka plechu je 3,5 m), kde válcováním za tepla vyrábí plechy různých tloušťek (Obrázek 8).

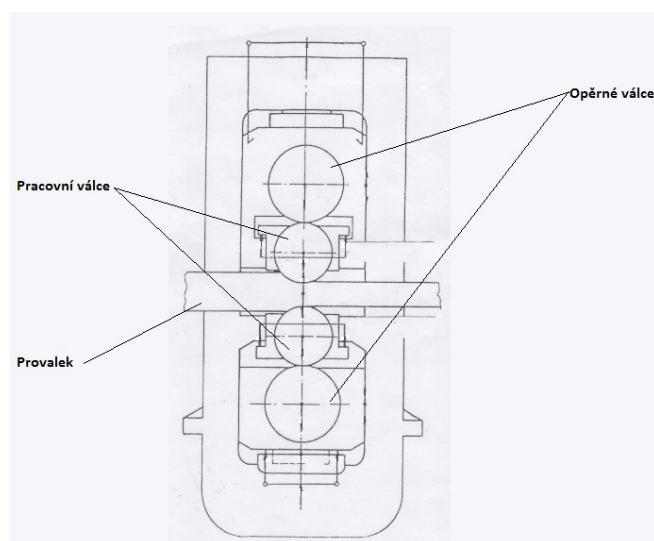
Historie válcovny sahá do roku 1971, kdy na této trati byla zahájena výroba. V průběhu let došlo k modernizaci a nyní je válcovna vybavena například dělicími nůžkami, ultrazvukovou linkou, tlakovým ostřikem okují aj.

Na samotné válcovací stolič bylo realizováno hydraulické mazání ložisek, či uvedení předohybu pracovních válců do provozu.



Obrázek 8 - Válcovací stolič Kvarto společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. [II]

Z Obrázku 9 je patrné uspořádání válců. Lze pozorovat, že pracovní a opěrné válce jsou uloženy vůči sobě rovnoběžně. Provalek pak prochází mezi horním a spodním pracovním válcem.



Obrázek 9 - Schéma válcovací stolič Kvarto

Válce jsou vyráběny odstředivým litím. Uvedená technologie výroby má řadu výhod [4]

- perfektní struktura odlitků,
- vysoká čistota a homogenita materiálu,
- garantované mechanické vlastnosti,
- možnost výroby vícevrstvých odlitků.

Oba válce jsou hladké. Jádru válců je houževnaté a plášť tepelně odolný. Jádru a plášť mají odlišné chemické složení, nicméně z hlediska mechanických vlastností podstatných pro následné analýzy je lze považovat za srovnatelné.

Vlivem zatížení dochází u válců k opotřebení a vzniku trhlin. Povrch je proto broušen a válce lze využívat do doby, než jejich průměr dosáhne limitní hodnoty.

K přitlaku horního a spodního pracovního válce k opěrnému válci se využívá systému, který se nazývá protiohyb pracovních válců. Protiohyb pracovních válců je realizován hydraulickým systémem a na hydraulických válcích musí být vždy nastavena základní síla přitlaku, která zaručuje reverzaci opěrných válců bez prokluzu.

Díky stálému přitlaku válců dochází k unášení opěrného válce pracovním. Jestliže by došlo k prokluzu mezi válci, mohlo by to mít za následek zničení válců.

Součinitel tření má zásadní význam u kontaktu mezi pracovním válcem a provalkem. Ze silového působení normálových a třecích sil v místě válcování vychází limitní podmínka válcování dle vztahu (1), která definuje součinitel tření [3].

Velikosti součinitelů tření jsou uvedeny v *Tabulce 1*.

$$f \geq \tan\left(\frac{\alpha_0}{2}\right), \quad (1)$$

kde α_0 definuje úhel záběru.

Kontaktní pár	Velikost
Pracovní válec a provalek [-]	0,3 - 0,5
Pracovním válec a opěrný válec [-]	0,01 - 0,11

Tabulka 1: Součinitele tření

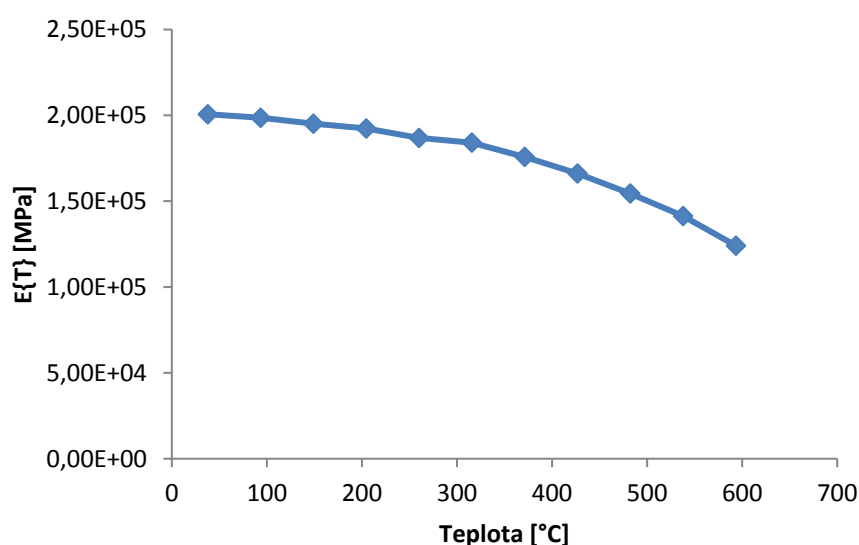
Uvedené součinitele tření byly převzaty z [5], kde je patrná závislost vlivu chemického složení oceli a teploty na velikost součinitele tření.

Pro přesné určení velikosti součinitele tření bude provedena studie vlivu jeho velikosti na dosažené výsledky.

Ve výpočtu je uvažován elastický materiálový model a materiál je považován za homogenní a izotropní. Elastický materiálový model se pohybuje pouze v oblasti platnosti Hookeova zákona, proto je popsán jen dvěma parametry, a to modulem pružnosti v tahu a Poissonovým číslem. Materiálová data válců byla dodána společností VÍTKOVICE STEEL, a.s.

Modul pružnosti provalku je velmi náročné určit, jelikož se teplota provalku pohybuje přibližně v rozmezí od 800 °C do 1100 °C. Závislost změny modulu pružnosti na teplotě závisí na chemickém složení materiálu provalku. Materiálem provalku je S355J2C.

Složení oceli S355J2C definuje [6]. Závislost modulu pružnosti oceli na teplotě, byla převzata z [7] a je vykreslena na *Obrázku 10*.



Obrázek 10 - E(T) provalku

Materiál je popsán jen do teploty 600 °C. Pro dosažení požadovaných hodnot teploty je využita lineární a polynomická extrapolace (až 4. řádu).

Modul pružnosti provalek bude v první fázi odhadnut z extrapolovaných dat a poté bude provedena studie vlivu velikosti modulu pružnosti provalku na dosažené výsledky analýzy. Materiálové parametry a mezní hodnoty namáhání jednotlivých členů soustavy jsou uvedeny v [17].

Práce zkoumá i vliv teplotních polí na napjatostní a deformační analýzu soustavy válců, proto je nutné stanovit hodnoty materiálových parametrů souvisejících s teplotní analýzou. Izotropní, homogenní materiál je při šíření tepla vedením (kondukcí) popsán součinitelem tepelné vodivosti λ .

Z [5] vyplývá, že u všech druhů ocelí se součinitel tepelné vodivosti nad teplotou 900 °C ustaluje na hodnotě 25 W·m⁻¹·K⁻¹. Pro válce lze odhadnout velikost součinitele tepelné vodivosti z [5]. Jejich velikost je uváděná v [17].

Vlivem teplotního zatížení dojde ke změně deformací oproti stavu, kdy je soustava zatížena jen mechanickými silami. Změna deformací následně vede ke změně rozložení pole napětí.

Řešení termoelastických problémů vychází z matematické teorie pružnosti, kde je z geometrických rovnic patrný vliv teplotního namáhání.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_L \cdot \Delta T \quad (2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha_L \cdot \Delta T \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_L \cdot \Delta T \quad (4)$$

$\varepsilon_{x,y,z}$ definuje poměrné podélné deformace, $\sigma_{x,y,z}$ normálová napětí, E modul pružnosti, μ Poissonovo číslo, α_L teplotní délkovou roztažnost a ΔT změnu teploty.

V rovnicích je uplatněna superpozice deformace vzniklé při mechanickém zatížení a deformace z teplotního namáhání. Superponované deformace pak vstupují do geometrických rovnic a rovnic rovnováhy.

Velikost teplotní délkové roztažnosti je uváděna pro teplotu oceli od 0 °C do 100 °C 12·10⁻⁶ K⁻¹ [6]. V následujících analýzách je předpokládána nezávislost velikosti teplotní délkové roztažnosti na teplotě.

Vlivem teplotního zatížení dochází ke změně mechanických vlastností. Závislost modulu pružnosti provalku na teplotě byla již prezentovaná v *Obrázku 10*. Pro závislosti modulu pružnosti na teplotě pracovního a opěrného válce jsou využity vztahy z [8].

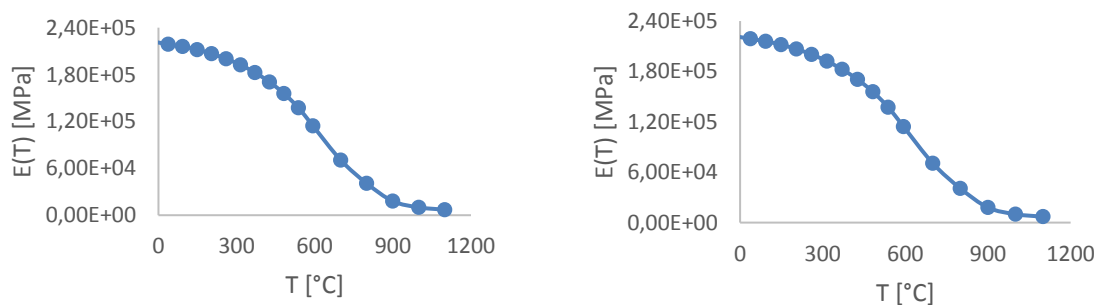
Pro modul pružnosti v rozsahu teplot 20 °C < T < 600 °C platí závislost

$$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})} = 1 + \frac{T}{2000 \cdot \ln\left(\frac{T}{1100}\right)}. \quad (5)$$

Pro modul pružnosti v rozsahu teplot 600 °C < T < 1000 °C platí závislost

$$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})} = \frac{690 - 0,69 \cdot T}{T - 53,5}. \quad (6)$$

$E(T)$ definuje velikost modulu pružnosti pro požadovanou teplotu, T je velikost teploty v °C. Moduly pružnosti válců jsou zobrazeny na *Obrázku 11*.



Obrázek 11 - Modul pružnosti (vlevo – pracovní válec, vpravo – opěrný válec)

V následujících analýzách je uvažovaná závislost Poissonova čísla materiálu na teplotě. Pro získání závislosti byly využity vztahy z [9].

Pro Poissonovo číslo v rozsahu teplot $0\text{ }^{\circ}\text{C} < T < 450\text{ }^{\circ}\text{C}$ platí.

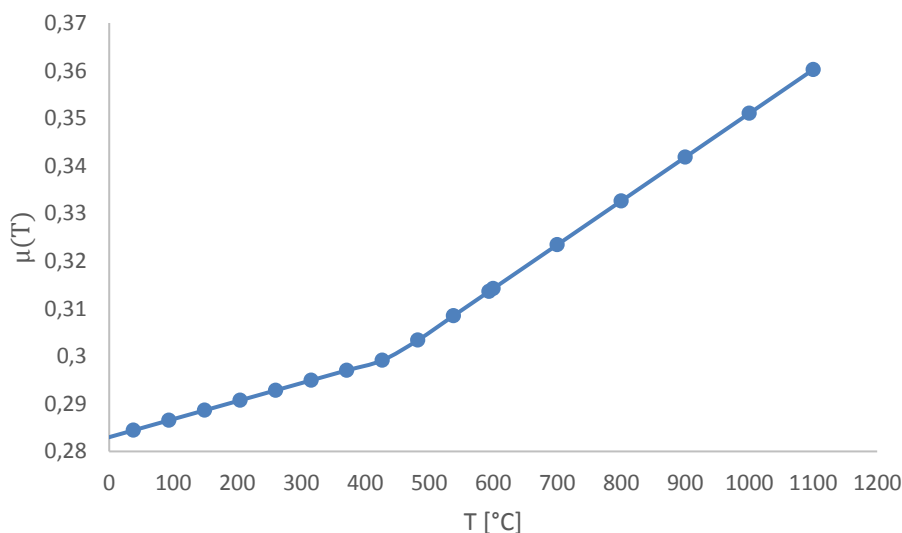
$$\mu(T) = 3,78 \cdot 10^{-5} \cdot T + 0,283. \quad (7)$$

Pro Poissonovo číslo v rozsahu teplot $450\text{ }^{\circ}\text{C} < T$ platí

$$\mu(T) = 9,2 \cdot 10^{-5} \cdot T + 0,259. \quad (8)$$

$\mu(T)$ definuje velikost Poissonova čísla pro požadovanou teplotu, T je velikost teploty v $^{\circ}\text{C}$.

V následujících analýzách je předpokládána stejná závislost Poissonova čísla pro provalek, pracovní válec i opěrný válec (Obrázek 12).



Obrázek 12 - Poissonovo číslo v závislosti na teplotě

3.2 Rozbor zatížení válců v průběhu válcovacího procesu

Soustava válců je při provozu zatížena silami nejrůznějšího charakteru a kvantifikace těchto sil je mnohdy velmi složitá v důsledku nestacionarity jednotlivých složek namáhání a změny směru působení.

Rozbor nejvýznamnějších složek napjatosti ve válcích.

- Ohybová napětí vyvolaná válcovacími silami a protiohybovými silami, jejichž velikost a směr je v čase proměnný (z důvodu otáčení válců přechází tah v tlak a naopak).
- Smyková napětí v důsledku tření mezi pracovním a opěrným válcem (resp. pracovním válcem a provalkem), která jsou v čase proměnná.
- Kontaktním napětí, jež je nejzásadnější z hlediska namáhání válců a vzniká v důsledku interakce opěrného a pracovního válce (resp. pracovního válce a provalku).
- Teplotní napětí vyvolané interakcí pracovního válce se zahřátým provalkem, jež je v čase proměnné.
- Zbytková napětí z důvodu technologie výroby válců.

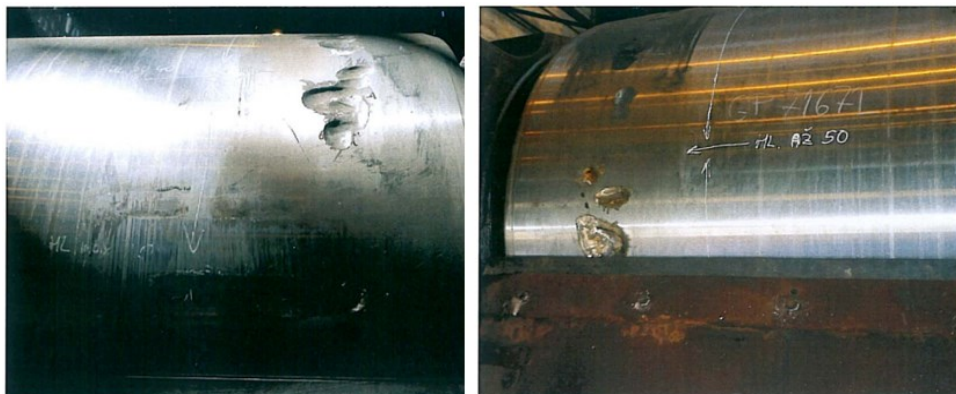
Z uvedeného rozboru vyplývá, že v průběhu válcovacího procesu se složky tenzoru napětí mění v čase i prostoru a jsou funkcí průvalu (průchodu provalku válcovací mezerou za účelem požadované změny jeho geometrie). Je velmi obtížné stanovit některé složky tenzoru napětí a přesně tak určit kritická místa.

Při vyhodnocování napětíové analýzy je nutné uvažovat vliv zbytkových napětí. Velikost zbytkových napětí není uvedena v [17].

Vlivem zatížení soustavy dochází ke vzniku kontaktních tlaků v důsledku interakce mezi pracovním a opěrným válcem (resp. pracovním válcem a provalkem), což velmi negativně ovlivňuje povrch a blízkou vrstvu pod povrchem válců. Tato skutečnost způsobuje vznik poruch na povrchu válce.

Nejtypičtějším poruchami jsou

- pitting – vznik důlků v kontaktní ploše v důsledku vzniklých tlaků (*Obrázek 13*), jedná se o lokální poruchu nelimitující provozuschopnost válců,



Obrázek 13 - Pitting

- trhliny – cyklické namáhání válců způsobuje překročení meze únavy, což vede k nukleaci poruch a vzniku trhlin,
- vyštípeniny okrajové části – vznikají v místě nehomogenit materiálů vzniklých z důvodu iniciace trhlin šířících se převážně rovnoběžně s osou válce (*Obrázek 14*), tato porucha často vede k vyřazení válce z provozu.



Obrázek 14 - Vyštípeniny

Uvedené poruchy se iniciují, jestliže celkový tenzor napětí v kritickém místě dosáhne hodnoty překračující mez únavy materiálu.

Následující výpočty předpokládají, že největší vliv na vzniklou napjatost mají válcovací a protiohybové síly.

V průběhu válcovacího procesu je nastavena hodnota úběru pro daný průchod. Jakmile provalky prochází válcovací mezerou, jsou měřeny okamžité hodnoty tlaků působících na plochy hydraulických pístů, které jsou následně přepočítány na skutečnou válcovací a skutečnou protiohybovou sílu.

Hodnoty skutečných sil namáhající soustavu válců v průběhu průchodu provalku válcovací mezerou při definovaném úběru jsou uvedeny v [17].

Velikost těchto sil je funkcí průvalu, proto budou pro následné výpočty vybrány hodnoty uvedené pro první úběr a následně bude testován mezní stav soustavy, tedy takový, kdy hodnoty uvedených sil nabývají maximálních hodnot.

Mezní hodnota sil byla na základě diskuze se zástupci společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. stanovena na velikosti uváděné v [17].

4 Kontaktní úloha

Ke vzniku kontaktu dochází při styku dvou těles. V oblasti kontaktu dochází k tvorbě kontaktní plochy, kterou se přenáší síly a vytvářejí normálovou tlakovou složku kontaktního napětí a smykovou složku kontaktního napětí v případě přítomnosti tření.

První teorie pro řešení kontaktních úloh byla formulována v roce 1882 *H. R. Hertzem*, který tuto teorii popsal bez uvažování tření mezi tělesy. Další autoři tuto problematiku dále rozšířili a doplnili [9].

Z pohledu studia kontaktu se nejčastěji kontakt dělí na dvě základní skupiny

- kontakt bez tření – přenáší pouze normálové složky sil,
- kontakt se třením – přenáší normálové a smykové složky sil.

Jiný typ dělení je dle typu kontaktních těles

- deformovatelné a deformovatelné těleso – kontakt mezi tělesy o přibližně stejné tuhosti,
- deformovatelné a tuhé těleso – jedno těleso má výrazně větší tuhost než druhé.

Nejjednodušším modelem zahrnující tření je Coulombův model, který je možné zapsat ve tvaru dle vztahu (9) [9]

$$|p_s| \leq f |p_n|. \quad (9)$$

p_n představuje normálovou složku síly a p_s tangenciální složku síly. Jestliže je p_s menší než limitní hodnota, nedochází k žádnému tangenciálnímu posuvu, v opačném případě dochází k posuvu ploch a generuje se třecí síla o velikosti zjistitelné z uvedené rovnice.

S rozvojem numerických metod byly navrženy různé numerické postupy pro řešení dané problematiky. Analýza kontaktní úlohy pomocí metody konečných prvků přináší určité problémy.

Z výpočetního hlediska kontaktní úloha představuje nelineární problém, což zvyšuje její časovou a hardwarovou náročnost. Další problém nastává z důvodu diskretizace hranice, či nepřesnou reprezentací normál mezi jednotlivými kontaktními plochami [9].

4.1 Kontaktní algoritmy

Moderní programové balíky jsou schopny využívat celou řadu algoritmů pro řešení kontaktních úloh a liší se zejména v detekci kontaktních oblastí. Definování kontaktu představuje velmi užitečný prostředek umožňující zajistit interakci mezi několika tělesy. Přidáním kontaktních podmínek se vytváří úloha, která mnohem realističtěji popisuje danou problematiku.

Tato práce se zabývá třemi nejužívanějšími algoritmy, které jsou využívány při analýze kontaktů

- **Lagrangeova metoda** (*Normal Lagrange*),
- **Rozšířená Lagrangeova metoda** (*Augmented Lagrange*),
- **Pokutový přístup** (*Pure Penalty*).

$$\text{Pokutový přístup} \quad F_{n_pen} = k_{n_pen} \cdot x_{p_pen} \quad (10)$$

$$\text{Lagrangeova metoda} \quad F_{n_lag} = k_{n_lag} \cdot x_{p_lag} + \lambda \quad (11)$$

F_{n_pen, n_lag} definuje vektor normálových složek sil, k_{n_pen, n_lag} je matice normálové kontaktní tuhosti, x_{p_pen, p_lag} je vektor penetrace a λ je vektor Lagrangeových multiplikátorů, jehož fyzikální význam je kontaktní tlak.

Díky členu λ je Lagrangeova metoda méně citlivá na velikost kontaktní tuhosti, ale přidává stupně volnosti (*DOF's*) pro splnění kontaktní kompatibility.

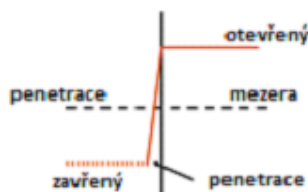
Jestliže není možná penetrace, stav kontaktu (definuje, zda dochází či nedochází ke kontaktu) může nabývat pouze dvou stavů – otevřený/zavřený (skoková změna velikosti tlakových sil). Tato skutečnost může způsobovat složitější konvergenci, protože kontaktní body mohou oscilovat. Uvedená problematika je nazývána chattering [11]. Rozšířená Lagrangeova metoda na rozdíl od Lagrangeovy metody zaručuje minimální penetraci.

Možné stavy kontaktu při použití Lagrangeovy metody jsou vykresleny v Obrázku 15.



Obrázek 15 - Normal Lagrange – kontaktní stav

Jestliže je možná mírná penetrace, vede výpočet ke zlepšení konvergence, protože již nedochází ke skokové změně kontaktního stavu (*Obrázek 16*).



Obrázek 16 – Pokutový přístup – kontaktní stav

V tangenciálním směru je situace totožná jako v normálovém směru. V tangenciálním směru je vždy využíván Pokutový přístup.

$$F_t = k_t \cdot x_s \quad (12)$$

F_t definuje vektor tangenciálních složek sil, k_t je matice tangenciální kontaktní tuhosti a x_s vektor posuvů v tangenciálním směru.

Tabulka 2 uvádí výhody (+) a nevýhody (-) kontaktních algoritmů [11].

Pokutový přístup	Lagrangeova metoda	Rozšířená Lagrangeova metoda
+ Dobrá konvergence.	+ Přesné splnění podmínky neprostupnosti povrchů.	+ Méně citlivá na volbu kontaktní tuhosti.
+ Nejsou přidány stupně volnosti k řešení.	+ Kontaktní tuhost není třeba definovat.	+ Vhodný pro iterační a přímé řešení úloh.
+ Vhodný pro iterační a přímé řešení úloh	- Zvýšení počtu stupňů volnosti o Lagrangeovy multiplikátory.	+ Dobrá konvergence.
- Vždy je nutná určitá míra penetrace.	- Problémy související se skokovou změnou kontaktního stavu.	- Zvětšení úlohy vlivem Lagrangeových multiplikátorů.
- Citlivý na volbu kontaktní tuhosti.	- Metoda je vhodná pro 2D a menší 3D úlohy.	- Vždy je nutná určitá míra penetrace.

Tabulka 2: Porovnání kontaktních metod

Tato práce se zabývá řešením úlohy primárně v softwaru Ansys Workbench, dále je použit software COMSOL Multiphysics a softwaru společnosti MSC. Pro jednotlivé softwary je proveden rozbor nastavení kontaktní úlohy.

4.1.1 Ansys Workbench 15.0

Ansys Workbench je software společnosti Ansys, Inc. Tento software je jeden z nejrozšířenějších softwarů využívající FEA (*Finite Element Analysis*). Obsahuje řadu možností pro pre/post-processing a také vlastní řešič.

Při řešení kontaktní úlohy metodou konečných prvků jsou využity prvky (elementy), které různými svými specifikacemi umožňují řešitelnost kontaktního problému. Kontaktní elementy, které obsahuje software Ansys Workbench jsou uvedeny v *Tabulce 3* spolu s vybranými specifikacemi [11].

Specifikace	Typ prvku		
	CONTA 178	CONTA 175	CONTA 171-174
Typ	Node - Node	Node - Surface	Surface - Surface
Posuvy	malé	velké	velké
Kontaktní tuhost	poloautomatická	poloautomatická/ automatická	poloautomatická/ automatická
Teplotní stupně volnosti	ne	ano	ano

Tabulka 3: Kontaktní prvky

Vybrané formulace v softwaru Ansys Workbench a jejich vlastnosti jsou uvedeny v *Tabulce 4*.

Formulace	Normálový směr	Tangenciální směr	Normálová tuhost	Tangenciální tuhost
Pure Penalty	Penalty	Penalty	Ano	Ano
Nor. Lagrange	Lagr. multip.	Penalty	Ne	Ano
Aug. Lagrange	Aug. Lagrange	Penalty	Ano	Ano

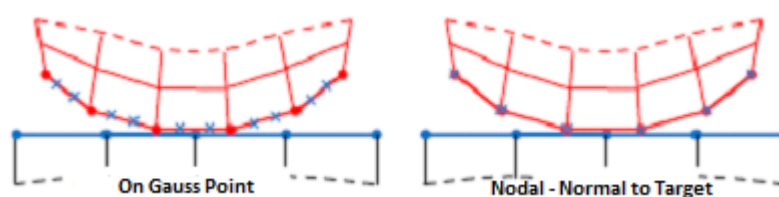
Tabulka 4: Vlastnosti vybraných formulací [11]

Ansys Workbench umožňuje automatickou detekci kontaktních ploch a vytvoření kontaktních párů. Pro detekci kontaktů využívá celou řadu možností [11]

- „Normal – Normal from Contact“ (případně „Normal – Normal to Target“) – definuje směr sil aplikovaných v rozhraní, což obvykle vyžaduje další výpočty pro určení normálového směru. Kontaktní oblast označena jako „Contact“ vstupuje do oblasti označené jako „Target“. Tyto metody jsou

užívány například v případě liniového kontaktu. Lagrangeova metoda využívá „*Nodal – Normal to Target*“ (Obrázek 17).

- „*Nodal – Projected Normal from Contact*“ – vynucuje kontaktní vazby na překrytých oblastech kontaktních ploch. Poskytuje přesnější popis posuvů kontaktních oblastí a kontaktního napětí v překrytých elementech než jiná nastavení. Výhodou je, že výsledky jsou méně citlivé na označení kontaktní a cílové plochy.
- „*On Gauss Point*“ – vytváří body mezi uzly, díky čehož dochází k mnohem účinnější detekci kontaktních ploch (Obrázek 17). Uvedená detekční metoda je využívána pro Pokutový přístup a Rozšířenou Lagrangeovu metodu.



Obrázek 17 - Detekce kontaktních ploch [11]

4.1.2 MSC Patran/Nastran

MSC Patran/Nastran patří do produktů vyvíjené společnosti MSC Software. Patran umožňuje nastavení konečno-prvkové analýzy pro řešiče jako MSC Nastran, MSC Marc Mentat, Ansys aj. Patran poskytuje sadu nástrojů pro tvorbu modelů řešících lineární a nelineární úlohy, explicitní dynamiku, tepelné děje, únavu aj. Výhoda Patranu mimo jiné spočívá v možnosti využití manuálních metod pro vytvoření strukturované sítě. Software Patran slouží uživateli pro pre/post-processing úlohy.

V Patranu existují dvě možnosti nastavení kontaktu – pomocí kontaktní tabulky, nebo pomocí vytvoření kontaktních párů.

V Patranu je možné definovat kontakt jako *Glue* (slepený) nebo *Touch* (dotykový).

Do kontaktů mohou vstupovat dva typy těles

- deformovatelné těleso (3D, 2D, 1D těleso),
- absolutně tuhé těleso (3D, 2D těleso).

U kontaktního tělesa s tvarem, který není přesně zachycen konečnými prvky, mohou být při vytváření kontaktu aktivovány analytické diskontinuity okrajů. Analytické diskontinuity okrajů jsou funkce, které následně řešič používá k určení skutečných zakřivení okrajů, které nejsou popsány (případně nelze dostatečně přesně popsat) konečnými prvky. Jestliže se jedná například o kruhové kontaktní plochy, používá MSC

Nastran změnu úhlu mezi dvěma plochami prvků tak, aby se co nejvíce přiblížil skutečné geometrii plochy [12].

V programu Patran lze dále modifikovat nastavení kontaktní interakce mezi tělesy.

- „*Slave and Master option*“ – nástroj specifikující, kde dochází ke kontaktu. Kontaktní oblast označena jako „*Slave*“ vstupuje do oblasti označené jako „*Master*“.
- „*Coordinate Modification*“ – umožňuje přesouvat uzly v rámci tolerančního pole tak, aby bylo zajištěno, že uzly budou na počátku analýzy v kontaktu (v případě nastavení možnosti „*initial contact*“). Případně lze nastavit funkci „*Delayed slide-off option*“, která je aktivní během celé analýzy a zajišťuje, aby uzly byly zarovnaný a nedošlo k minutí druhého kontaktního tělesa. Obě uvedené možnosti lze spolu kombinovat.

K detekci kontaktů je ve výchozím nastavení využívána metoda „*Node-to-Segment Contact Detection*“, alternativní možností je pak „*Segment-to-Segment Contact Detection*“.

- „*Node-to-Segment Contact Detection*“ – metoda funguje na principu „*Slave and Master option*“. Obvyklým problémem je, že u velkého rozdílu velikosti prvku je vybrána nesprávná konfigurace a uzly z tělesa označeného jako „*Master*“ proniknou „*Slave*“ tělesem a způsobí nesprávné výsledky kontaktů. Doporučuje se zvolit jako „*Slave*“ těleso s menší velikostí prvku. Možností také je nastavení oboustranného kontaktu, což vede k situaci, že kontaktní podmínka bude dvakrát kontrolována a může se tím významně prodloužit doba analýzy.
- „*Segment-to-Segment Contact Detection*“ – metoda vede ke snazší detekci kontaktů. Metoda umožňuje větší rozdíl ve velikosti prvků na kontaktní ploše, jelikož vytváří další body na plochu prvku a kontroluje obě těla pro kontakt mezi těmito body. Dále je nutné definovat, zda bude docházet k malému, či velkému posuvu kontaktních prvků. V případě možnosti malých relativních posuvů („*Small-Sliding*“) je nutné podmínku malých posuvů dodržet během celé analýzy. V případě velkých relativních posuvů („*Large-Sliding*“) je možné, aby byly posuvy při analýze malé ale i velké.

Možnosti „*Node-to-Segment Contact Detection*“ je kontaktní problém řešen Lagrangeovou metodou. V případě „*Segment-to-Segment Contact Detection*“ je kontaktní problém řešen Pokutovým přístupem.

Na rozdíl od softwaru Ansys Workbench, MSC Nastran je nastaven tak, že nepředpokládá existenci kontaktu mezi tělesy. Výchozí nastavení souvisí s tím, že pro řešení kontaktní úlohy software potřebuje znát typ kontaktu a jeho parametry.

Pokud není uvedeno jinak, MSC Nastran využívá přednastavené hodnoty pro obecné případy kontaktu. Přednastavené parametry jsou ve většině případů postačující a není nutné je měnit.

4.1.3 MSC Marc Mentat

MSC Marc Mentat umožňuje elegantně simulovat všechny druhy nelinearit – geometrické i materiálové včetně kontaktu. Obsahuje možnosti pro pre/post-processing i samotný řešič.

Software MSC Marc Mentat umožňuje automatickou detekci kontaktních ploch bez použití speciálních kontaktních prvků. V uvedeném softwaru je implementován robustní numerický postup pro simulaci kontaktních problémů.

MSC Marc Mentat umožňuje nastavení kontaktu jako *Glue* (slepený) nebo *Touch* (dotykový). Do kontaktu mohou vstoupit dva typy těles – deformovatelné a tuhé.

Deformovatelné těleso charakterizují elementy tvořící těleso, uzly na vnějších plochách, které jsou považovány za potencionální kontaktní uzly a hrany (resp. plochy), které popisují vnější povrch, jenž může být kontaktován jiným tělesem (obsahuje kontaktní segmenty).

Detekce kontaktních ploch závisí na nastavení uživatele. Obecně platným pravidlem je, že za dotykové prvky by měly být označeny ty, které mají jemnější síť (délka hrany prvku je menší než na druhém tělese) a za kontaktované segmenty jsou považovány prvky na tělese s hrubší sítí. Takto nadefinovaný kontakt využívá možnost „*Single-Sided Contact Detection*” a provádí detekci jen v jednom směru. Výchozím nastavením je „*Double-Sided Contact Detection*”, který provádí detekci v obou směrech, nicméně dochází tím k nárůstu výpočetního času [13].

Základní nastavení kontaktů a detekční metody jsou totožné s uvedenými metodami v kap. 4.1.2.

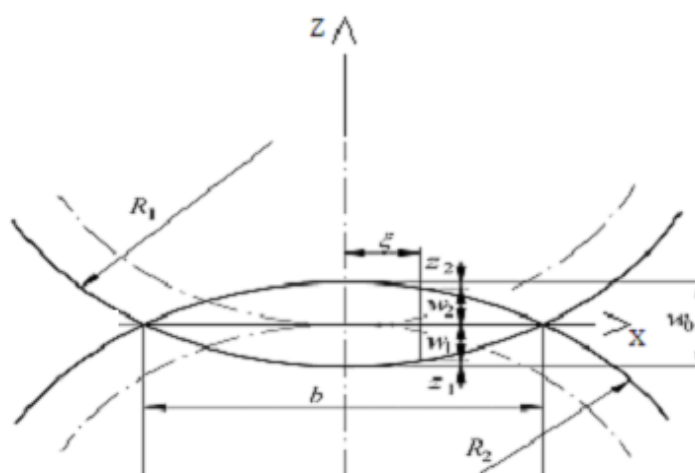
4.2 Hertzův kontakt dvou válců

Kontaktní úloha dvou válců s rovnoběžnou osou je jedna ze základních úloh Hertzovy teorie [11]. Hertzova teorie byla odvozena na základě předpokladů

- materiál je lineární, homogenní a izotropní,
- materiály těles mají podobné mechanické vlastnosti,
- kontaktní povrch má konstantní zakřivení,
- kontaktní tlak má eliptické rozložení v kontaktní ploše,
- válce jsou nekonečně dlouhé,
- mezi tělesy nedochází ke tření.

Řešení problematiky kontaktu válců válcovací stolice ovšem nesplňuje dva Hertzovy předpoklady – mezi válci dochází ke tření a nejedná se o nekonečně dlouhé válce.

Odvození vztahů pro řešení kontaktní úlohy Hertzovou teorií vychází z geometrie uvedené v *Obrázku 18*.



Obrázek 18 - Schéma

Z geometrické charakteristiky v obecném bodě $x < \frac{b}{2}$ vyplývá

$$\frac{z_{1,2}}{x} = \frac{x}{2R_{1,2} - z_{1,2}}. \quad (13)$$

Pro $z_{1,2} \ll R_{1,2}$ lze vztah (13) na

$$\frac{z_{1,2}}{x} = \frac{x}{2R_{1,2}}. \quad (14)$$

$R_{1,2}$ označuje poloměry válců.

Z *Obrázku 18* je patrné přiblížení středů válců

$$w_0 = w_1 + w_2 + z_1 + z_2. \quad (15)$$

Derivací podle souřadnice x a úpravě je dán vztah (16)

$$\frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} = -x \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (16)$$

Pro poloprostor zatížený tlakem p na nekonečně dlouhé délce platí vztah

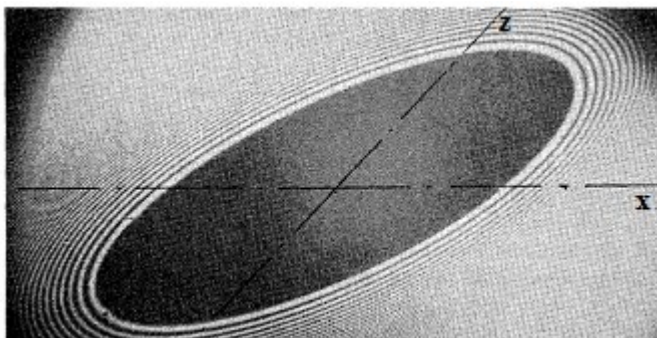
$$\frac{dw_{1,2}}{dx} = -\frac{2(1-\mu_{1,2})}{\pi G_{1,2}} x \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{p(\xi)}{x^2 - \xi^2} d\xi. \quad (17)$$

Po dosazení (14) do (13) a úpravách je dán vztah pro řešení integrálu ve tvaru

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{p(\xi)}{x^2 - \xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2}}, \quad (18)$$

kde $G_{1,2}$ definuje modul pružnosti ve smyku a $\mu_{1,2}$ Poissonovo číslo.

Z experimentální mechaniky, kdy byla pomocí fotoelasticimetrie sledována vzniklá napjatost, je patrné eliptické rozložení kontaktního tlaku (*Obrázek 19*). Rovnice elipsy pro uvedený případ, kdy poloosy elipsy leží v osách globálního souřadného systému, je dána vztahem



Obrázek 19 - Kontakt dvou válců [10]

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{[p(\xi)]^2}{q^2} = 1. \quad (19)$$

Kde $\frac{b}{2}$ definuje velikost hlavní poloosy elipsy a q velikost vedlejší poloosy.

Pro stanovení velikosti vedlejší poloosy elipsy je nutné vyjít z okrajové podmínky, že maximální hodnota kontaktního tlaku vzniká, jestliže $\xi = 0$. Člen q je pak dán vztahem

$$q = p_{max}. \quad (20)$$

Po dosazení (20) do (19) a úpravách je dán vztah pro rozložení kontaktního tlaku v kontaktní ploše

$$p(\xi) = p_{max} \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi}{b}\right)^2}. \quad (21)$$

Jestliže se vztah (18) dosadí do vztahu (21) je získán vztah pro maximální tlak

$$p_{max} = \frac{1}{2b} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2}}. \quad (22)$$

Z rovnice rovnováhy sil mezi zatěžující a kontaktní silou je dán vztah pro maximální kontaktní tlak v závislosti na válcovací síle

$$p_{max} = \frac{4F}{\pi b L_v}, \quad (23)$$

kde L_v definuje délku válců a F je zatěžující síla.

Po dosazení (23) do (22) je dán vztah velikosti kontaktní plochy v závislosti na velikosti válcovací síly. Do vztahu (22) je při úpravách aplikován vztah pro přepočet modulu pružnosti ve smyku na modul pružnosti v tahu [10].

Velikost kontaktní plochy je dána vztahem

$$b = \sqrt{\frac{16F \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}}{\pi L_v \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (24)$$

Vztahy pro popis napjatosti podél osy z jsou uvedeny v rovnicích (25), (26) a (27). Tyto vztahy byly převzaty z [10]. Člen a uvedený v následujících rovnicích, charakterizuje polovinu velikosti kontaktní plochy ($a = b/2$).

$$\sigma_x(z) = -\frac{2p_{max}}{a} \left(\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2z \right) \quad (25)$$

$$\sigma_y(z) = \mu[\sigma_x(z) + \sigma_z(z)] \quad (26)$$

$$\sigma_z(z) = -\frac{2p_{max}a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (27)$$

$$\tau_{xz}(z) = \left| \frac{\sigma_x(z) - \sigma_z(z)}{2} \right| \quad (28)$$

Hloubka, ve které vzniká maximální hodnota smykového napětí, je významná z hlediska posouzení pevnosti. U houževnatých materiálů je v místě vzniku maximálního smykového napětí nepravděpodobnější výskyt poruchy.

Pro materiál s Poissonovým číslem 0,3 platí, že maximální hodnota vzniká v hloubce z_{max} dle (29) a jeho hodnota je τ_{max} dána rovnicí (30). Vztahy byly převzaty z [10].

$$z_{max} = 0,78b \quad (29)$$

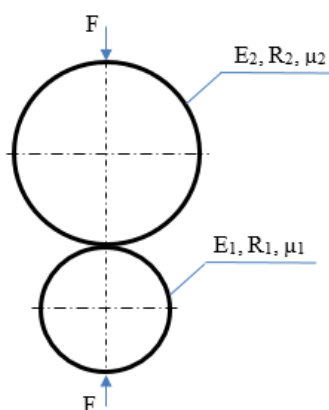
$$\tau_{max} = 0,3p_{max} \quad (30)$$

5 Analýza rovinné úlohy kontaktu dvou válců

Postupně je provedena analýza rovinné úlohy pomocí Hertzovy teorie, s využitím softwaru Ansys Workbench a COMSOL Multiphysics. Úloha (*Obrázek 20*) je řešena jako rovinná deformace (*Plane strain*) pro zvolený případ zatížení. Analýza kontaktní úlohy dvou válců je provedena pro hodnoty uvedené v [17].

Parametry úlohy	Hodnoty
Poloměr pracovního válce R_1 [m]	viz [17]
Poloměr opěrného válce R_2 [m]	viz [17]
Zatěžující normálová síla F_{lin} [N/m]	3 392 647
Modul pružnosti v tahu pracovního válce E_1 [Pa]	viz [17]
Modul pružnosti v tahu pracovního válce E_2 [Pa]	viz [17]
Poissonova konstanta pracovního válce μ_1 [-]	viz [17]
Poissonova konstanta opěrného válce μ_2 [-]	viz [17]

Tabulka 5 – Parametry úlohy



Obrázek 20 - Schéma úlohy

Při využití numerických metod je mezi tělesy nadefinován kontakt bez tření a je využito symetrie soustavy.

5.1 Analytické řešení (Hertzova teorie)

Pro výpočet byly využity vztahy dle *kap. 4.2* a výsledné hodnoty jsou uvedeny v *Tabulce 6*.

Sledované parametry	Velikost
Maximální hodnota kontaktního tlaku [MPa]	624
Maximální hodnota smykového napětí [MPa]	187
Maximální hodnota redukovaného napětí dle HMH [MPa]	351
Šířka poloviny kontaktní plochy [mm]	3,46
Hloubka - vznik max. smykového napětí [mm]	2,7

Tabulka 11: Výsledky – Hertzova teorie

Průběhy napětí budou vykresleny v *kap. 5.3.*, kde budou zároveň porovnány s numerickým řešením metodou konečných prvků.

5.2 Numerické řešení (Ansys Workbench, COMSOL Multiphysics)

Výpočet byl proveden v programu Ansys Workbench s využitím třech různých kontaktních algoritmů (Pokutový přístup, Rozšířena Lagrangeova metoda, Lagrangeova metoda) a dále v programu COMSOL (*Obrázek 21*).

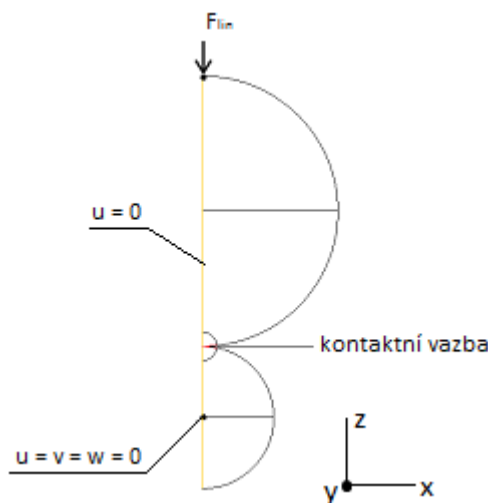


Obrázek 21 - Zhuštění sítě v místě kontaktu (vlevo Ansys, vpravo COMSOL)

V obou softwarech byly zadány totožné okrajové podmínky. Úloha je řešena jako rovinná deformace.

Jde o semikoercitivní úlohu, jejíž řešitelnost pomocí numerických metod představuje vždy komplikovaný problém. V uvedeném případě bylo původní zatížení aplikované na oba válce nahrazeno zatížením jen na jeden válec a posuv druhého válce byl omezen v jeho

ose, čímž v podpoře vzniká reakční síla stejné velikosti a opačného směru, jako je zatěžující síla (Obrázek 22).



Obrázek 22 - Okrajové podmínky 2D úlohy

Veličiny u , v a w definují posuvy ve směru x , y a z .

V Tabulce 7 jsou uvedeny maximální hodnoty sledovaných parametrů. V pracovním válci (dále jen *PV*) vznikají rozdílné hodnoty sledovaných parametrů oproti opěrnému válci (dále jen *OV*). Tyto rozdíly jsou důsledkem různé tuhosti obou válců. Poloha v Tabulce 7 uvádí, v jaké hloubce pod povrchem vzniká maximální hodnota redukovaného napětí dle HMH. Hodnota velikosti kontaktní plochy definuje jen polovinu skutečné velikosti.

Kontaktní metoda	Kontaktní tlak [MPa]	HMH napětí [MPa]		Poloha [mm]		Velikost kontaktní plochy [mm]
		PV	OV	PV	OV	
Pokutový přístup	624,1	352,2	349,8	2,2	2,7	3,46
Lagrangeova metoda	625,9	352,2	350,6	2,2	2,7	3,46
Rozšířená Lag. Metoda	624,1	352,1	349,8	2,2	2,7	3,46

Tabulka 7: Výsledky – Srovnání kontaktních metod

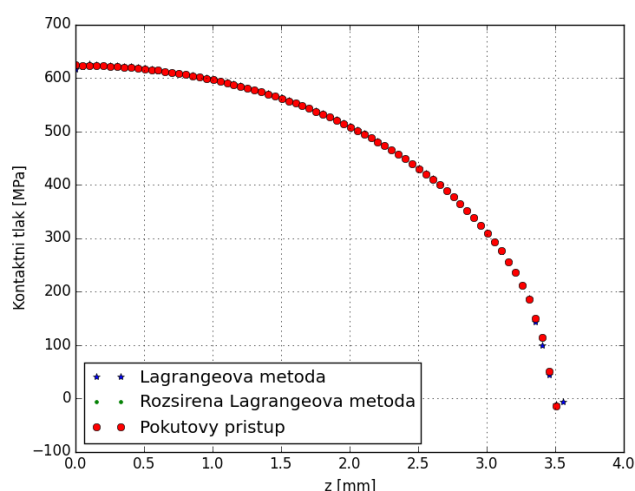
Shoda výsledků při použití různých kontaktních algoritmů je patrná z vykreslení průběhu vzniklých kontaktních tlaků v kontaktní ploše (Obrázek 23). Relativní chyba v maximálních hodnotách uvedených veličin je menší než 0,3 %.

Při nastavení kontaktní úlohy bylo nutné u Pokutového přístupu (resp. Rozšířené Lagrangeovy metody) definovat kontaktní tuhost, případně míru penetrace. Bez nastavení

uvedených parametrů nebylo dosaženo shody výsledků. V případě použití Lagrangeovy metody, která nedovoluje penetraci, je dosaženo korektních hodnot bez dalších nastavení.

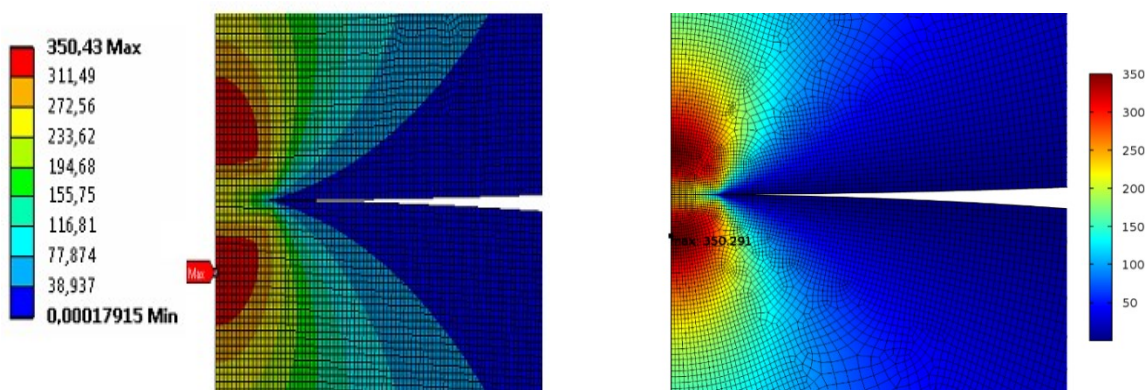
Kontaktní metoda	Penetrace		Normálová tuhost	Aktualizace normálové tuhosti		
	Hodnota	Faktor	Faktor	Nikdy	Při každé iteraci	Při každé iteraci (agresivní)
Lagrangeova metoda	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Rozšířená Lagr. met.	<input checked="" type="checkbox"/>	0,001	1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Pokutový přístup	<input checked="" type="checkbox"/>	0,001	1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Tabulka 13: Nastavení kontaktní metody



Obrázek 23 - Kontaktní tlak – Porovnání kontaktních metod

Shoda je rovněž patrná v analýze provedené pomocí softwaru Ansys Workbench a softwaru COMSOL Multiphysics (Obrázek 24). Maximální hodnota HMM napětí je shodná.



Obrázek 24 - HMM napětí [MPa] (vlevo Ansys, vpravo COMSOL)

V porovnávací úloze byla v softwaru Ansys Workbench využita Lagrangeova metoda bez dalších nastavení a v kontaktní oblasti byly vytvořeny kvadratické prvky. V softwaru COMSOL Multiphysics byla využita Rozšířená Lagrangeova metoda

s výchozím nastavením a počáteční hodnotou kontaktního tlaku $\frac{F_{lin}}{2a}$. Diskretizace kontaktní oblasti byla provedena lineárními prvky.

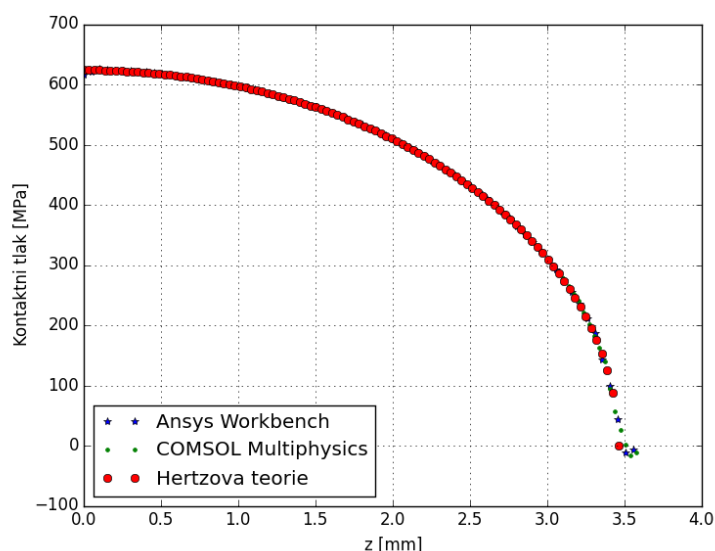
5.3 Porovnání výsledků

Hertzova teorie předpokládá vznik totožné napjatosti v obou válcích. Numerické řešení respektuje tuhost obou válců, zatímco při analytickém řešení vstupují do vztahů redukované parametry popisující modul pružnosti a poloměry válců, čímž definují tuhost celé soustavy. Srovnání analytického a numerického řešení je uvedeno v *Tabulce 8*.

Metoda řešení	Kontaktní tlak [MPa]	HMH napětí [MPa]		Poloha [mm]		Velikost kontaktní plochy [mm]
		PV	OV	PV	OV	
Ansys Workbench	624,1	350,4	348,9	2,5	2,7	3,46
COMSOL Multiphysics	624,1	350,3	348,4	2,5	2,7	3,46
Hertzova teorie	624,1	347,8	347,8	2,7	2,7	3,46

Tabulka 8: Výsledky – Srovnání výpočetních metod

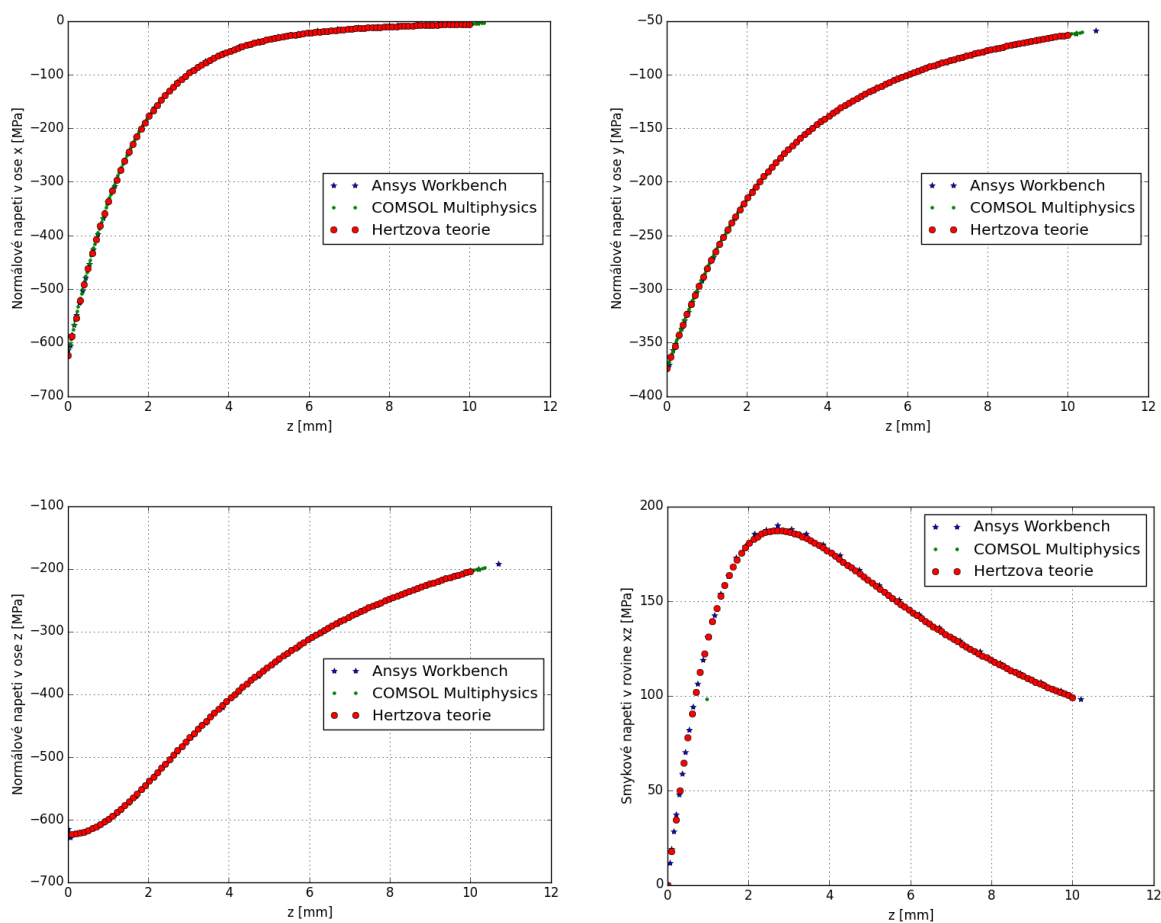
Při porovnání maximálních hodnot kontaktního tlaku a z vykreslení průběhu kontaktního tlaku (*Obrázek 24*) je patrná shoda výsledků.



Obrázek 24 - Kontaktní tlak (srovnání)

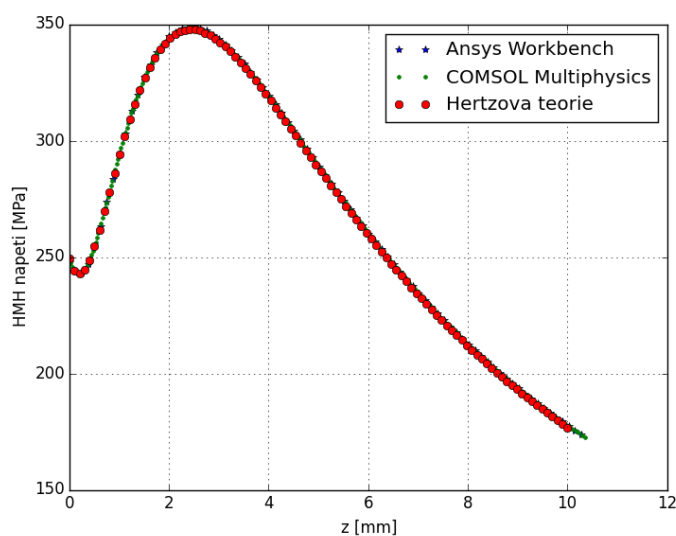
Úloha je definovaná jako rovinná deformace, ve válcích tedy vzniká trojosá napjatost s třemi nenulovými složkami normálových napětí a jednou nenulovou složkou smykového napětí.

Na *Obrázku 25* je vykreslen průběh jednotlivých složek napětí podél osy z (pro $x = 0$) a zároveň porovnává hodnoty získané numerickým a analytickým řešením.



Obrázek 25 - Průběhy složek tenzoru napětí podél osy z ($x = 0$)

Z *Obrázku 25* je patrná shoda průběhu všech složek tenzoru napětí. *Obrázek 26* charakterizuje průběh HMH napětí.

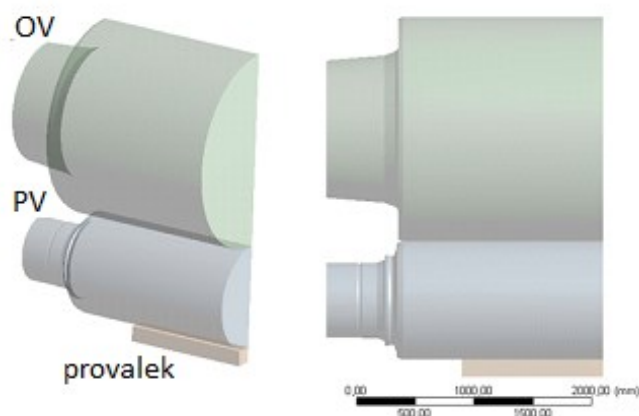


Obrázek 26 – Průběh HMH napětí podél osy z ($x = 0$)

6 Analýza prostorové soustavy válců

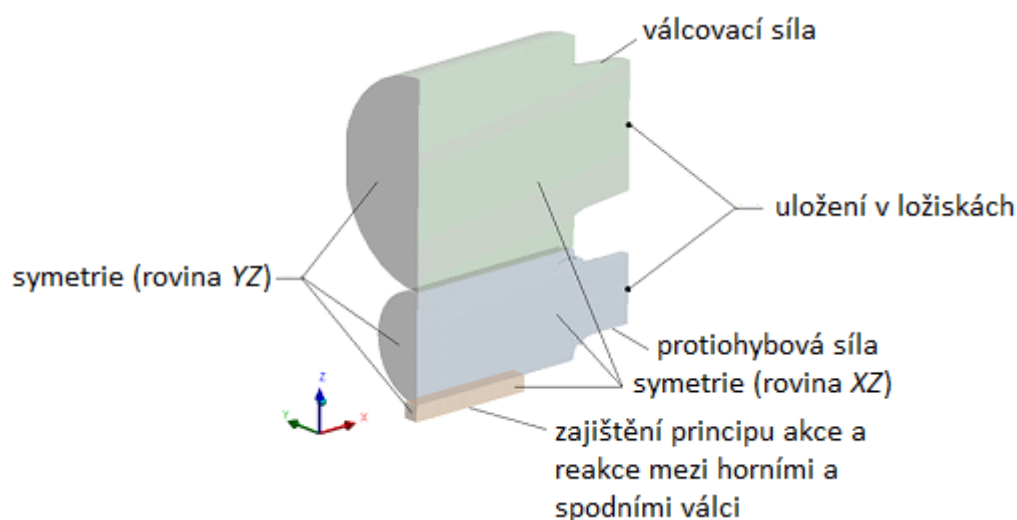
Skutečná geometrie válců zahrnuje tvarové změny (zaoblení, zkosity aj.), které výraznou měrou ovlivňují vzniklou napjatost ve válcích. Rovinný model tyto geometrické změny není schopen zachytit, proto je nutné využít 3D model soustavy, jež umožní popsat skutečnou napjatost ve válcích.

Geometrický model byl vytvořen na základě výkresové dokumentace dodané společností *VÍTKOVICE STEEL, a.s.* se zahrnutím všech důležitých konstrukčních prvků (zaoblení, zkosoř, aj.) až po osu pevného ložiska, ve které jsou válce uloženy (*Obrázek 27*).



Obrázek 27 - Geometrický model válců

Při zadávání okrajových podmínek je snahou, se co nejvíce přiblížit reálnému chování soustavy. Je respektováno uložení soustavy, vzájemné interakce a jednotlivá zatížení soustavy. Rovněž je nutné do okrajových podmínek zahrnout omezení posuvů plynoucích z využití symetrie soustavy (*Obrázek 28*).



Obrázek 28 - Okrajové podmínky

Veličiny u , v a w definují posuvy ve směru x , y a z .

Okrajové podmínky:

- $u = 0$ (v průsečíku střednicových rovin PV a OV se střednicovou osou pevného ložiska) - reprezentuje uložení v ložiskách (možnost naklopení),
- $u = 0$ (aplikováno na plochy těles) – reprezentuje podmínku plynoucí z využití symetrie vůči rovině YZ ,
- $v = 0$ (aplikováno na plochy těles) – reprezentuje podmínku plynoucí z využití symetrie vůči rovině XZ ,
- $u = v = w = 0$ (aplikováno na střednicovou rovinu provalku) – zajišťuje princip akce a reakce mezi horními a spodními válci,
- válcovací síla působí v záporném směru osy z ,
- protiohybová síla působí v kladném směru osy z .

Mezi PV a OV (resp. PV a provalkem) je zadána kontaktní vazba se třením.

Vzhledem k náročnosti úlohy je snahou vytvořit takový výpočtový model, kde je dostatečně jemná prostorová diskretizace zajišťující přesný popis dosažených výsledků hledaných veličin a zároveň je zachována minimální časová náročnost výpočtu.

Zhušťování sítě bylo prováděno v kritické oblasti, kterou představuje oblast styku PV a OV. Síť je označena za kvalitní, jakmile je rozdíl mezi maximální velikostí HMMH napětí na dvou různých sítích menší než 3 %.

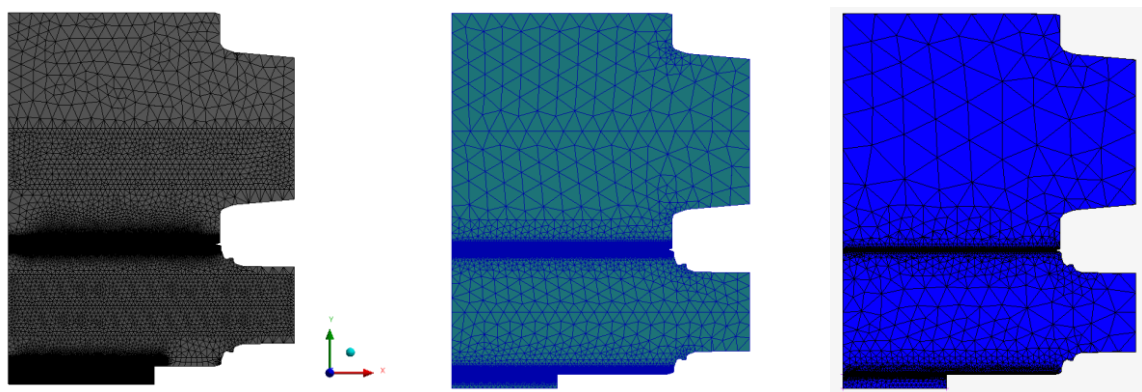
Je provedena statická strukturální analýza s využitím elastických materiálových modelů a kontaktních vazeb. Jsou uvažovány malé deformace.

Statická analýza popisuje chování soustavy v momentě, kdy provalek prochází mezi pracovními válci a válce jsou zatíženy válcovací a protiohybovou silou, které zajišťují vyvození tlaku na provalek za účelem požadovaného úběru.

Analýza je provedena v různých softwarech a jednotlivé výsledky jsou vyhodnoceny a porovnány.

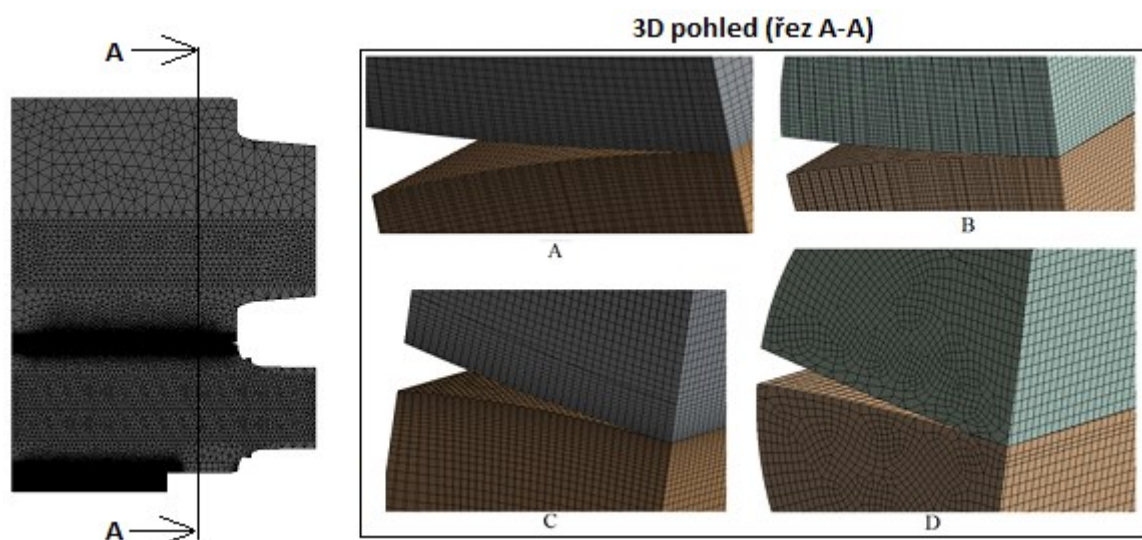
6.1 Statická analýza (Ansys, MSC Software)

V konečno-prvkových softwarech jsou vytvořeny různé výpočtové modely válců, na kterých je prováděna analýza současného stavu.



Obrázek 29 - Model sítě konečných prvků (Ansys Workbench, Patran, MSC Marc Mentat)

Zjemňování sítě v kritické oblasti v programu Ansys Workbench, jehož výsledky jsou pro další analýzy klíčové, je prezentováno na Obrázku 30.



Obrázek 30 – Modely sítě konečných prvků v řezu kritické oblasti

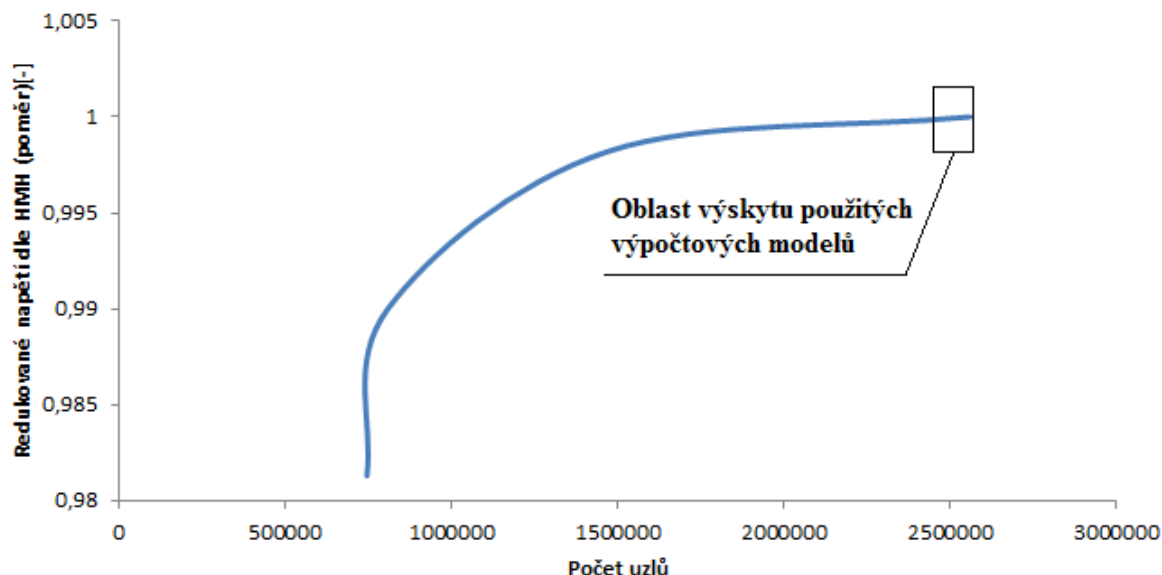
V době provádění analýz v různých programových balících nebyly známy skutečné hodnoty zatížení, proto byly použity odhadnuté velikosti válcovací a protiohybové síly.

Pro zajištění kvality dosažených výsledků je v kritické oblasti využito 620 500 kvadratických prvků.

V první fázi jsou využity modely obsahující jemnou síť po celém objemu. V průběhu zjemňování sítě dochází k zhušťování pouze v kritické oblasti a ve zbylých částech je snahou mít síť hrubou. Oblasti s hrubší sítí nejsou pro prováděné analýzy podstatné a je možné tak snižovat výpočtový čas úlohy bez změny kvality dosažených výsledků.

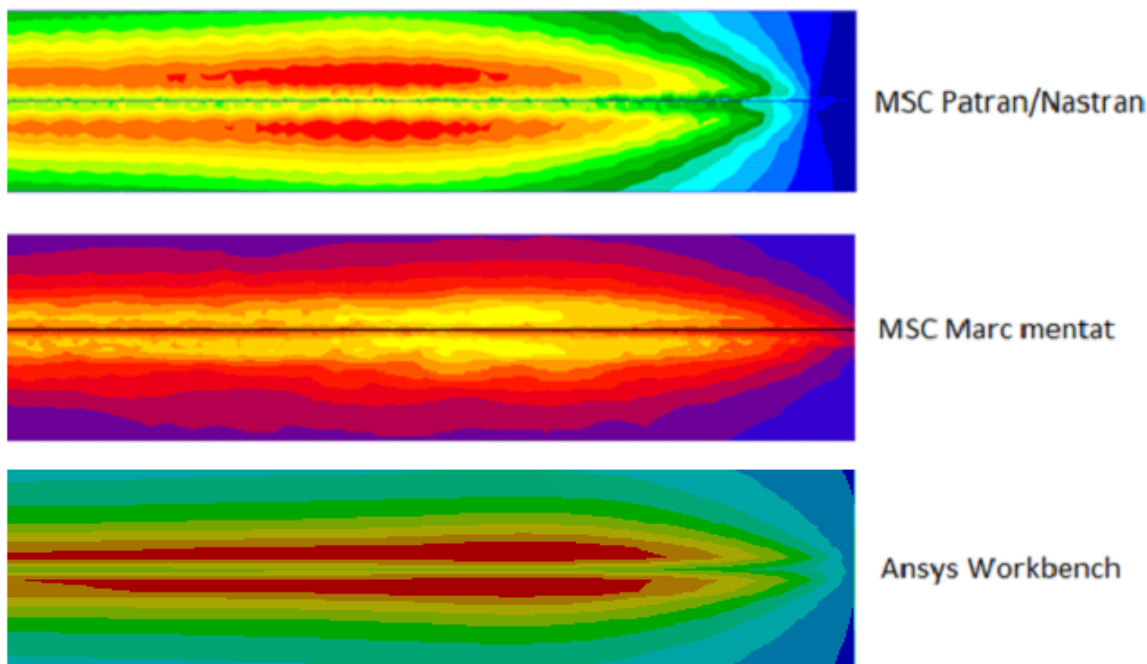
Z provedených analýz je patrné, že maximální hodnota redukovaného napětí dle HMH vzniká v OV. *Obrázek 31* zobrazuje závislost maximální hodnoty redukovaného napětí dle HMH na počtu uzlů v kritické oblasti OV.

Relativní chyba mezi dosaženými hodnotami u výpočtového modelu s minimálním a maximálním počtem uzlů je menší než 3%.



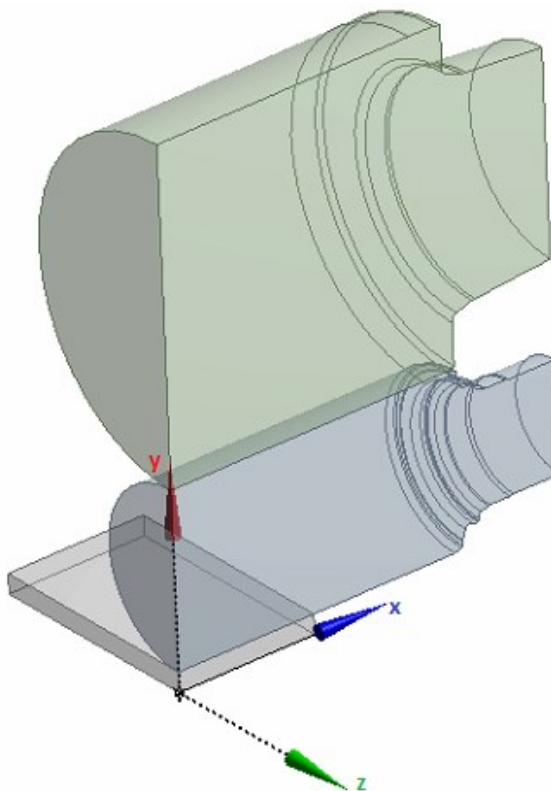
Obrázek 31 - Závislost σ_{HMH} na počtu uzlů v kritické oblasti (Ansys Workbench)

Při řešení úlohy je patrná citlivost softwaru *Ansys Workbench* a softwaru *MSC Nastran* na kvalitu sítě (*Obrázek 29*). Software *MSC Marc Mentat* je schopen úlohu řešit s hrubší sítí bez ztráty kvality dosažených výsledků (*Obrázek 32*).



Obrázek 32 - Rozložení HMH napětí v kritické oblasti (mezi OV a PV)

Mezi sledované parametry patří i lokalizace vzniku extrémů HMH napětí. Lokalizace je provedena vůči globálnímu souřadnému systému (*GSS*) uvedeného v *Obrázku 33*.



Obrázek 33 - Poloha globálního souřadného systému (GSS)

Pro popis napjatosti je sestaven tenzor napětí v místě extrémních hodnot HMH napětí. Sestavený tenzor respektuje zákon sdruženosti smykových napětí.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (31)$$

$\sigma_{x,y,z}$ definuje normálové složky tenzoru napětí v osách x , y a z , $\tau_{xy,xz,yz}$ smykové složky tenzoru napětí v rovinnách xy , xz a yz .

Výsledky jsou uvedeny v [17].

Diskretizace úloh je pro uvedené softwary odlišná, proto mezi výsledky došlo k rozdílům u normálových a smykových složek tenzoru napjatosti. Softwary využívají různé kontaktní algoritmy a různé přesnosti řešiče, které způsobují rozdíly ve výsledných hodnotách.

Následující analýzy jsou prováděny již jen v softwaru Ansys Workbench a výsledky jsou rozebrány podrobněji.

6.1.1 Studie vlivu materiálových a třecích parametrů

Z důvodu závislosti modulu pružnosti na teplotě je provedena studie vlivu velikosti modulu pružnosti provalku při statické analýze, kde není zahrnut teplotní vliv na velikost maximálního redukovaného napětí dle HMH. Výsledky studie jsou uvedeny v [17].

Z výsledků je zřejmé, že velikost modulu pružnosti provalku nemá výrazný vliv na výslednou hodnotu redukovaného napětí dle HMH teorie (ke změně dochází až na prvním desetinném místě). Pro další výpočty bude použita hodnota modulu pružnosti 60 000 MPa.

Dále je provedena studie vlivu velikosti koeficientu tření mezi jednotlivými členy soustavy na dosažené výsledky. Výsledky studie jsou uvedeny v [17].

Studie byla provedena pro různé hodnoty součinitele tření. Při posouzení dosažených výsledků je patrné, že vliv velikosti součinitele tření způsobuje změnu maximální hodnoty redukovaného napětí dle HMH v jednotkách MPa. Pro další výpočty bude použita hodnota součinitele tření uvedena v [17].

S využitím uvedeného výpočtového modelu, stanovené hodnoty modulu pružnosti v tahu a definovaného součinitele tření je provedena analýza současného stavu při mezním stavu namáhání.

6.1.2 Studie vlivu použitých kontaktních metod

Kontaktní úloha vnáší do výpočtu silnou nelinearitu a nesprávné nastavení kontaktních metod může mít za následek výsledky, které se zdaleka liší od reálných hodnot. Správnost řešení kontaktních úloh tedy závisí ve velké míře na řešiteli – jeho znalostech a zkušenostech.

Pro studii zabývající se kontaktními algoritmy je využit software Ansys Workbench. Tabulka 9 zobrazuje možnosti nastavení parametrů jednotlivých kontaktních metod.

Kontaktní metoda	Penetrace		Normálová tuhost	Aktualizace normálové tuhosti		
	Hodnota	Faktor	Faktor	Nikdy	Při každé iteraci	Při každé iteraci agresivní
Lagrangeova metoda	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Rozšířená Lag. Metoda	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Pokutový přístup	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Tabulka 9: Nastavení kontaktních metod

Nastavení kontaktních úloh vychází z doporučení udávaných v literatuře společnosti Ansys, Inc. [11]

Pro nastavení kontaktních metod umožňující penetraci (Pokutový přístup, Rozšířená Lagrangeova metoda)

- vždy používat příkaz $KEYOPT(10) = 2$, tedy s nastavením aktualizace kontaktní tuhosti při každé iteraci (platí pro všechny typy kontaktních prvků),
- pro rozsáhlé modely pak využívat nastavení $FKN = 1$ (FKN – „Contact Stiffness Factor“) a $KEYOPT(10) = 2$,
- vhodné pro rozsáhlé modely ($>300\,000$ DOF's),
- použití PCG („Preconditioned Conjugate Gradient“) řešiče.

Z literatury společnosti Ansys, Inc. vyplývá informace o možném ovlivnění výsledků vlivem vyšší penetrace [11]

- sto násobný rozdíl ve FKN vede ke sto násobnému rozdílu v penetraci, ale vede jen k 1% rozdílu u kontaktního tlaku, z čehož plyne, že penetrace nevede ke změně kontaktní oblasti a neovlivňuje kontaktní tlak a odvozené napětí.

Větší penetrace se tedy může projevit v ovlivnění posuvů, nicméně neovlivní vzniklou napjatost vyvozenou v důsledku kontaktního tlaku.

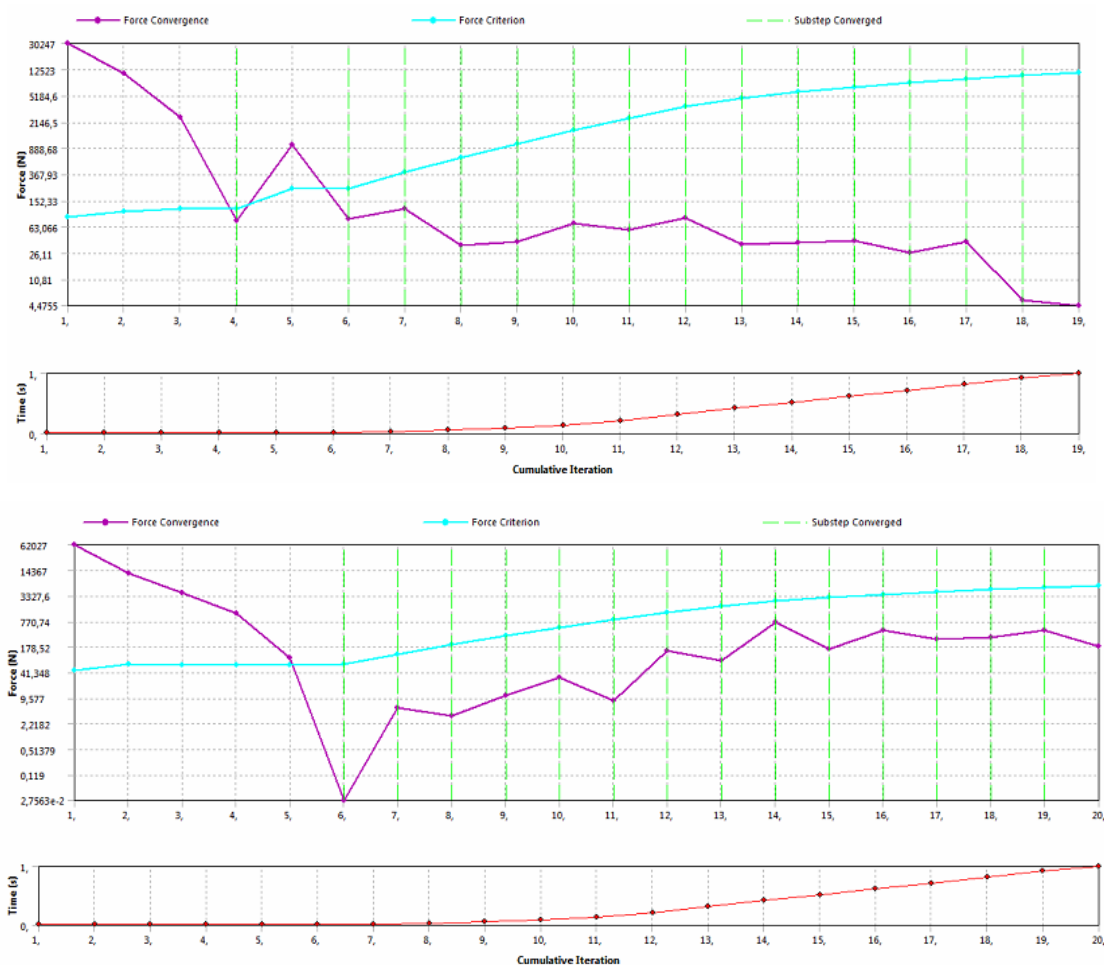
Nastavení metody Normal Lagrange nevyžaduje žádné další specifikace. Z doporučení vyplývá pouze vhodnost užití této metody

- metodu používat pro 2D úlohy,
- metoda je vhodná pro 3D úlohy s nelineárním materiálovým modelem s malým počtem stupňů volnosti ($< 100\,000$ DOF's),
- vhodná pro velké posuvy.

Výsledky analýzy jsou uvedeny v [17].

Metoda Normal Lagrange využívá k řešení úlohy přímý řešič, který v uvedené úloze řeší 21 mil. rovnic. Z důvodu hardwarových omezení není možné takto náročnou úlohu vyřešit, proto řešení pomocí metody Normal Lagrange bylo z analýz prostorové soustavy válců vyřazeno.

Použitím různých metod pro řešení kontaktních problémů je dosaženo shodných výsledků, liší se pouze v desetinách MPa. Z porovnání grafů silové konvergence je patrné, že při použití Rozšířené Lagrangeovy metody bylo provedeno 19 iterací, zatímco při použití Pokutového přístupu 20 (Obrázek 34).



Obrázek 34 – Silová konvergence (nahore Rozšířená Lagrangeova Metoda, dole Pokutový přístup)

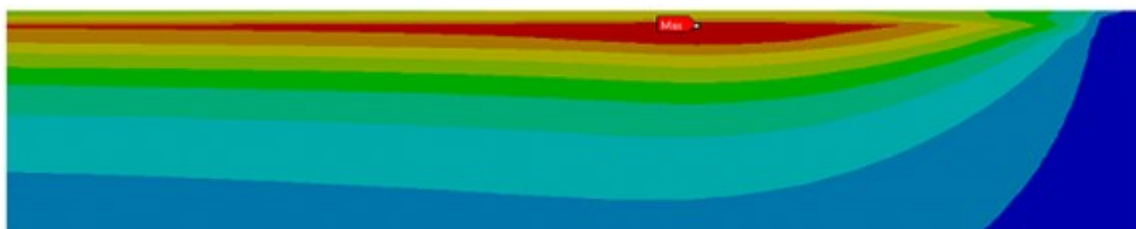
Z porovnání výpočtových časů je zřejmé, že při použití Pokutového přístupu byla úloha vyřešena o 22 % rychleji. Tuto skutečnost způsobují Lagrangeovy multiplikátory, které do úlohy vnáší další stupně volnosti.

Pro další výpočty je využit Pokutový přístup.

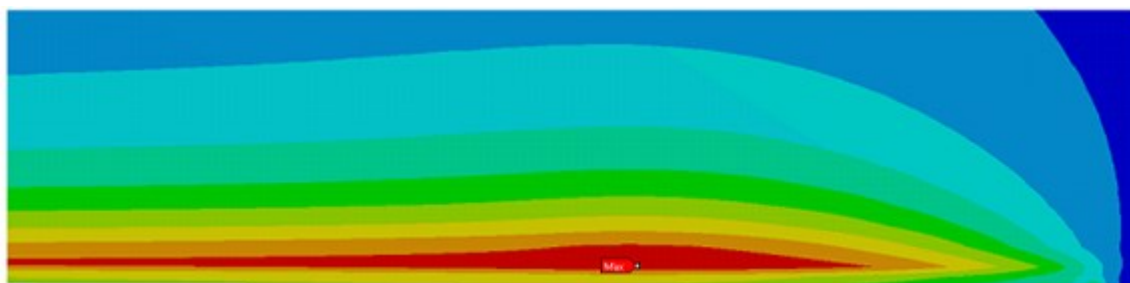
6.2 Analýza mezních stavů soustavy

Analýza mezních stavů je provedena s výše uvedenými okrajovými podmínkami a s využitím hodnot parametrů stanovených provedenými studiemi.

Z analýzy jsou patrné rozložení redukovaných napětí dle HMM, které je možné porovnat s mezními stavy materiálu (Obrázek 35 - 36).



Obrázek 35 - HMM napětí v PV



Obrázek 36 - HMM napětí v OV

Velikosti HMM napětí jsou uváděny v [17].

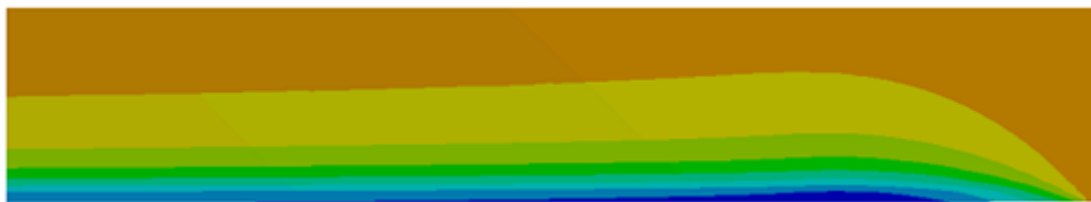
Vzniklá napjatost v PV se pohybuje na mezi pevnosti PV. Při analýze byl využit lineární materiálový model, který uvažuje jen elastické deformace. Za mezí kluzu se materiál chová nelineárně a velký nárůst deformace nezpůsobuje úměrně velký nárůst velikosti napětí. Skutečnou maximální velikost HMM napětí v PV nelze s využitím lineárního materiálového modelu stanovit, nicméně lze předpokládat, že při daném typu zatížení budou PV s velkou pravděpodobností nevratně poškozeny.

OV při uvedeném typu zatížení vyhoví.

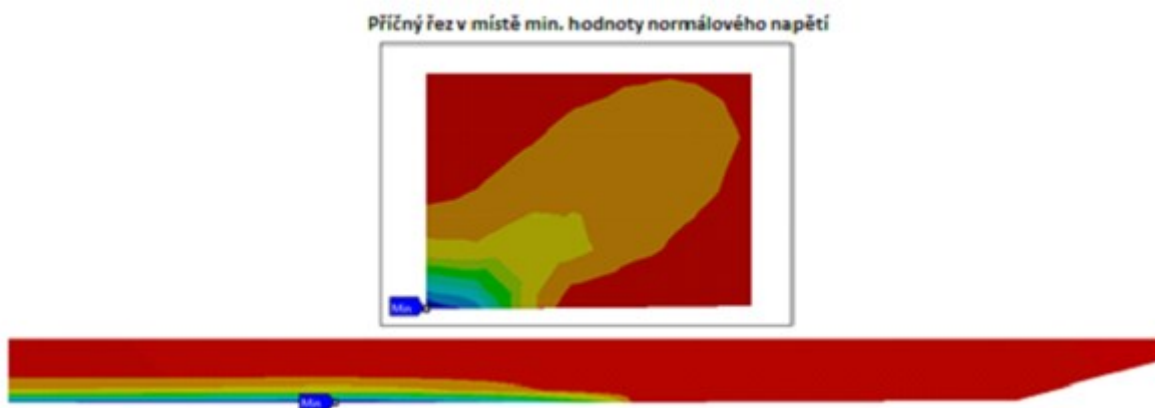
Pro podrobnější popis vzniklé napjatosti jsou vykresleny jednotlivé složky tenzoru napětí (Obrázky 37 - 42). Jejich velikosti jsou uváděny v [17].



Obrázek 37 - Normálové napětí v ose x (OV)



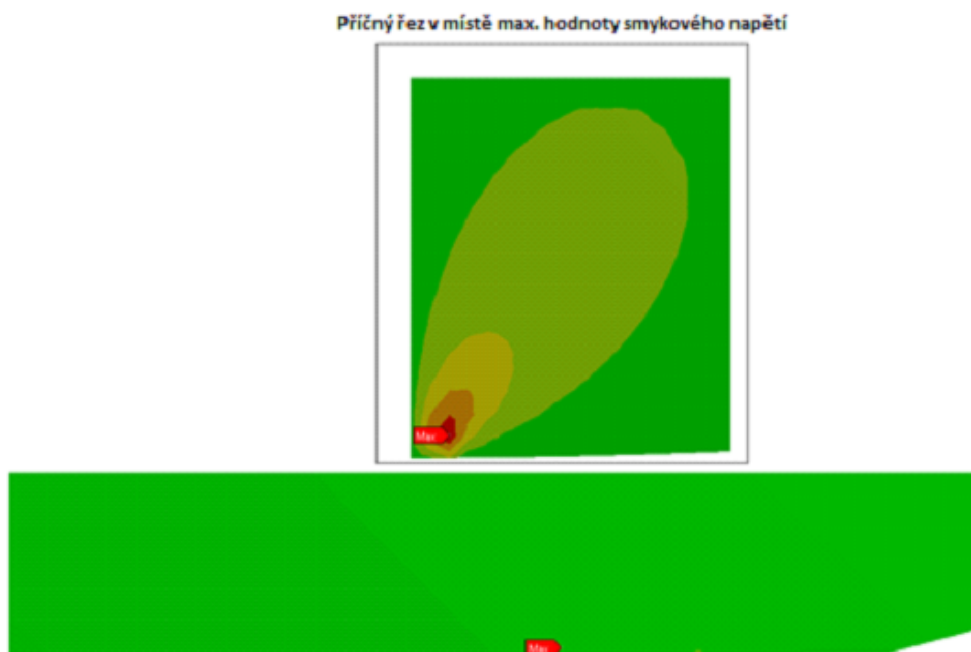
Obrázek 38 - Normálové napětí v ose y (OV)



Obrázek 39 - Normálové napětí v ose z (OV)



Obrázek 40 - Smykové napětí v rovině XY (OV)

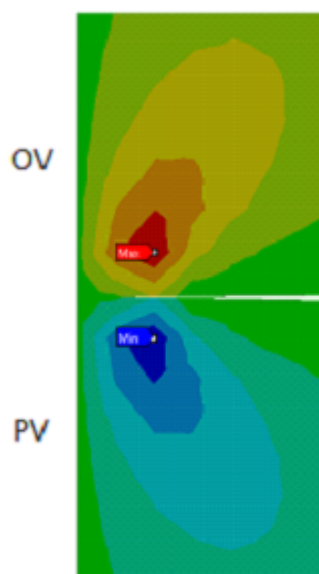


Obrázek 41 - Smykové napětí v rovině YZ (OV)



Obrázek 42 - Smykové napětí v rovině XZ (OV)

Hodnoty a rozložení jednotlivých složek tenzoru napětí v PV je téměř shodné s uvedeným rozložením v OV (Obrázek 43).



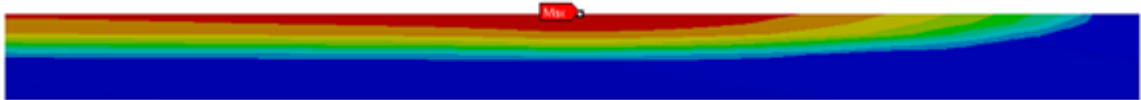
Obrázek 43 - Smykové napětí v rovině YZ (OV a PV)

Z řešení Hertzovy úlohy vyplývá, že místo vzniku maximální hodnoty smykového napětí se neshoduje se vznikem maximální hodnoty redukovaného napětí dle HMM. Lokalizace vzniku extrémních hodnot smykových napětí je uváděná v [17].

Dle Hertzovy teorie lze tedy v uvedených místech předpokládat vznik a šíření trhlin.

Kritické místo dále vyplývá z analýzy normálových napětí, kde je patrný vznik extrémních hodnot napětí na povrchu válců vlivem kontaktních tlaků vzniklých interakcí válců.

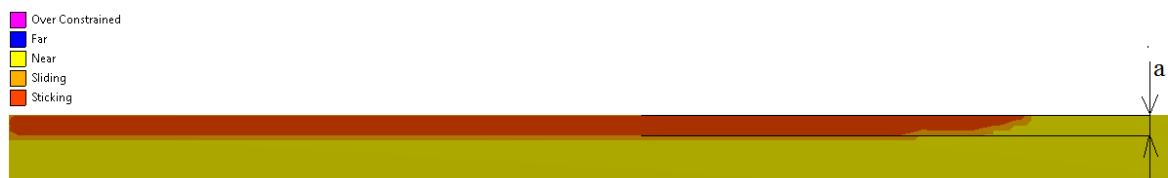
Rozložení kontaktních tlaků je zobrazeno v *Obrázku 44*.



Obrázek 44 - Kontaktní tlak (interakce OV-PV)

Vlivem kontaktních tlaků vznikají na povrchu válců normálová napětí, jejichž velikost je přibližně rovna velikosti kontaktního tlaku. Jestliže mezi povrchy válců dojde k nárůstu velikosti kontaktního tlaku nad přípustnou mez, začne docházet ke vzniku lokálních poruch válců (*pittingu*).

Při zatížení válců dochází k přechodu liniového kontaktu vlivem deformace válců na plošný kontakt. Z analýzy je odhadnuta maximální velikost poloviny kontaktní plochy (*Obrázek 45*).



Obrázek 45 - Kontaktní stav (interakce PV-OV)

Vlivem použité metody pro řešení kontaktní analýzy je umožněna penetrace. Velikost penetrace může následně ovlivnit velikost výsledných posuvů, proto je nutné zjistit její velikost (*Obrázek 46*).



Obrázek 46 - Penetrace (interakce PV-OV)

V úloze jsou očekávány řádově vyšší hodnoty posuvů, než je vzniklá penetrace. Teprve po provedení analýzy průhybu válců, je možné stanovit, zda vzniklá penetrace má či nemá na velikost posuvů výraznější vliv.

Zatížení soustavy je definováno pouze v ose y , což způsobuje nejvýraznější deformaci právě v tomto směru. Ve směru osy válců (osa x) dochází k posuvům, které jsou řádově menší a v ose z jsou posuvy nulové. Chování válců při zatížení je tedy dostatečně popsáno vykreslením průhybu podélných os válců ve směru y .

Průhybové křivky jsou uváděny v [17].

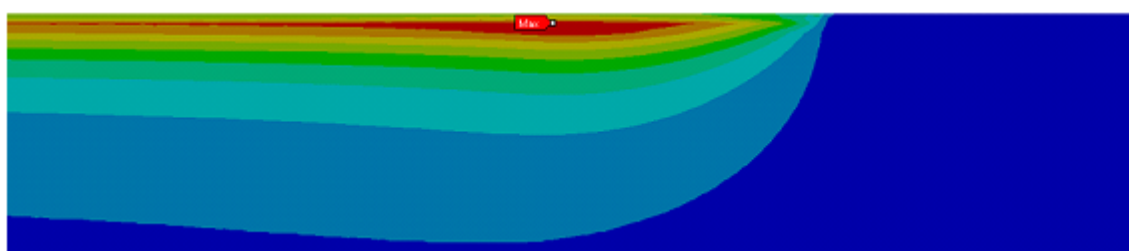
Průhybové křivky obou válců jsou výrazně ovlivněny vzniklými kontaktními tlaky. V případě PV je patrný vliv tuhosti provalku na vzniklé deformace. V místech, kde končí

oblast styku PV a provalku, dochází k přechodu konkávní průhybové křivky v konvexní. Tvar této křivky je tedy ovlivněn rozměry a tuhosti provalku.

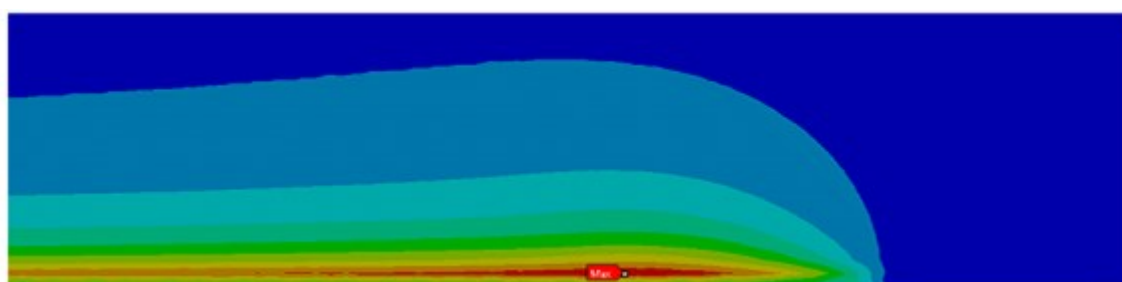
Při porovnání penetrace a průhybu válců je zřejmé, že velikost penetrace je vůči průhybům řádově nižší a má zanedbatelný vliv na dosažené výsledky.

V průběhu válcovacího procesu dochází k vzniku povrchových vad, které jsou odstraněny broušením válců, což je spojeno s úběrem materiálu. Mezní hodnoty velikosti průměru válců jsou uváděny v [17].

Následující analýza bude provedena pro mezní hodnoty zatížení a minimální průměry válců (Obrázek 47 – 48).



Obrázek 47 - HMH napětí v PV (min. průměr)



Obrázek 48 - HMH napětí v OV (min. průměr)

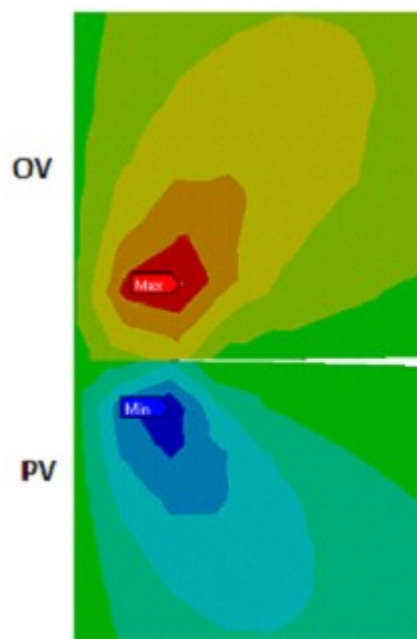
Z uvedených průběhů MHM napětí je patrný nárůst maximální hodnoty v OV o 7 %. V PV velikost HMH napětí vzrostla o 0,2 % a stále se pohybuje na úrovni meze pevnosti materiálu. U pracovního válce tedy nedochází k výrazné změně tuhosti, která by se projevila v maximálních hodnotách napětí. U OV změna tuhosti způsobuje výraznější nárůst maximální hodnoty HMH napětí, nicméně se tato hodnota stále pohybuje pod mezi pevnosti materiálu.

V případě kontaktního tlaku nedochází k razantnímu zvýšení maximální hodnoty, lze tedy předpokládat, že také napjatost nebude změnou průměru válců výrazně ovlivněna (Obrázek 49).



Obrázek 49 - Kontaktní tlak (min. průměr)

Uvedený předpoklad potvrzuje vykreslení smykové složky v rovině YZ (Obrázek 50).



Obrázek 50 - Smykové napětí v rovině YZ (min. průměr)

Snižování průměrů válců po přípustnou mez nevede k výrazné změně napjatosti, jejíž tenzor by vedl k překročení mezních hodnot opěrného válce.

7 Analýza prostorové soustavy válců se zahrnutím teplotních polí v provalku

Do válcovacího procesu je po válcovací trati z pece dopravovaná, na požadovanou teplotu rozežhřátá brama. Brama prochází ostřikem okují a pokračuje k válcovací stolici, kde je sledovaná a zaznamenávána její teplota.

Před pracovním válcem je umístěn vysokotlaký ostřik, který se používá jen v některých průchodech. Vysokotlaký ostřik se provádí jen z důvodu odstranění okují vzniklých během válcování nebo odstranění okují, které zůstaly po primárním odokujení. V následujících výpočtech je vliv ostřiku okují zanedbán.

Vlivem vzniklých mechanismů přenosu tepla, jež budou podrobněji rozebrány níže, dochází ke vzniku teplotních polí v PV (resp. v OV).

PV je v přímé interakci s rozežhřátým provalkem, proto je u válcovací stolice zavedeno jejich chlazení.

Vlivem interakce rozežhřátého provalku a PV dochází ke „*crown effectu*“, nebo-li teplotní balicitě, kdy je teplo nerovnoměrně odváděno z povrchu podél osy válce. Teplotní balicita má za následek větší průměr ve středu válce než na jeho okrajích, což je nutné eliminovat řízením chladících trysek.

Stávající systém chlazení je zajištěn tak, aby teplota válců nepřekročila přípustnou mez, a je realizováno pomocí segmentového chlazení, které slouží k ovlivnění teplotního roztažení válců. Podrobnější rozbor, dle kterého je vytvořen výpočtový model, je proveden v [17].

7.1 Mechanismy přenosu tepla

Přenos tepla je děj, kdy dochází k předávání tepelné energie mezi soustavou a okolím nebo mezi dvěma soustavami. Přenos je realizován pomocí tří základních mechanismů

- Kondukcí (vedením),
- Konvekcí (prouděním),
- Radiací (zářením).

Přenos tepla je dále rozlišen dle závislosti na čase

- Stacionární,
- Nestacionární.

7.1.1 Kondukce

Kinetická energie neuspořádaného pohybu molekul se předává srážkami na sousední molekuly, a tak se přenáší tepelná energie. Tento typ přenosu tepla dominuje u pevných látek, nicméně se vyskytuje také v tekutinách bez proudění, kde vedení zvyšují volné elektrony či ionty [15].

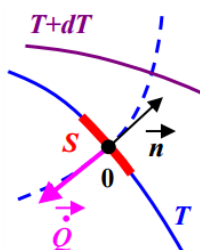
Platí, že

$$Q = q_t \cdot S \cdot \tau, \quad (32)$$

kde Q představuje teplo, τ čas, q_t hustotu tepelného toku a S izotermickou plochu kolmou k tepelnému toku.

Hustota tepelného toku (Obrázek 51) je při přenosu tepla vedením definována Fourierovým zákonem:

$$q_t = -\lambda_t \cdot \text{grad}(T), \quad (33)$$



Obrázek 51 - Ilustrace tepelného toku [15]

\vec{n} je jednotkový vektor ve směru normály k izotermické ploše (směřuje do míst s vyššími teplotami), \vec{Q} je tepelný tok definující množství tepla, které projde plochou za jednotku času.

Ve Fourierově zákoně se vyskytuje veličina λ_t , která je nazývána součinitel tepelné vodivosti. Hodnoty jsou pro různé materiály tabelovány.

Pro odvození diferenciální rovnice vedení tepla je nutné vyjmout objemový element, na kterém jsou sestaveny rovnovážné rovnice. Po úpravách je získána diferenciální rovnice tepla (pro c , λ , ρ nezávislé na teplotě T) [15]

$$\frac{dT}{d\tau} = a_t \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (34)$$

Člen a definuje teplotní vodivost a je dán vztahem (35), c_p definuje měrnou tepelnou kapacitu při konstantním tlaku a ρ hustotu

$$a_t = \frac{\lambda_t}{c_p \cdot \rho}. \quad (35)$$

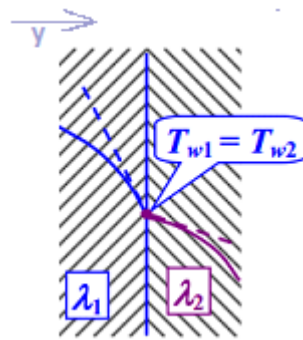
Řešením diferenciálních rovnic přímých úloh je dále určeno rozložení teplot v prostoru a čase za pomoci počátečních a okrajových podmínek.

Počáteční podmínky – určují rozložení teplot na počátku děje pro $\tau = 0$

Okrajové podmínky – rozlišuje se několik typů okrajových podmínek (dále jen OP):

- Dirichletova OP – určuje rozložení teplot na povrchu tělesa v daném čase,
- Neumannova OP – určuje rozložení hustot tepelného toku na povrchu tělesa v daném čase,
- Newtonova OP – určuje rozložení součinitelů přestupu tepla na povrchu tělesa (a teploty okolí) v daném čase,
- OP ve styku dvou těles,
 - Dokonalý styk těles (Obrázek 52),

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)_w = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial y} \right)_w \quad (36)$$

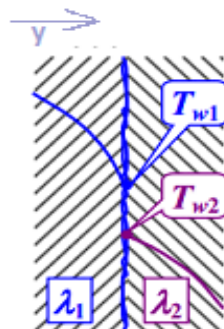


Obrázek 52 - Dokonalý styk [15]

- Nedokonalý styk těles (Obrázek 53),

$$q_w = \frac{1}{R_k} (T_{w1} - T_{w2}) \quad (37)$$

R_k představuje kontaktní tepelný odpor, jenž je závislý na drsnosti, tlaku mezi tělesy a druhem plynu v kontaktu, q_w hustotu tepelného toku nedokonalého styku, $T_{w1,w2}$ definuje teploty jednotlivých ploch a index w určuje polohu nezávislé souřadnice y .



Obrázek 53 - Nedokonalý styk [15]

- OP s fázovou přeměnou látky na povrchu.

7.1.2 Konvekce

Transportem molekul v prostoru při nuceném či přirozeném proudění se přenáší i tepelná energie. Přenos tepla konvekcí dominuje v tekutinách, nicméně existuje také v pevných látkách (např. při difúzi).

Rozlišují se dva základní typy konvekce:

- nucená – vyvozena zdrojem, který může představovat ventilátor, kompresor, čerpadlo či vítr aj.,
- přirozená – vyvozená rozdílem hustot (v důsledku rozdílu teplot).

Přenos tepla konvekcí je výrazně složitější než přenos kondukcí, jelikož současně je nutné řešit diferenciální rovnice energie, rovnice kontinuity a pohybové rovnice (Navier – Stokesovy rovnice [15]), tak aby byly splněny okrajové podmínky teplotních a rychlostních polí.

Z teorie podobnosti při konvekci je možné získat rozložení teplotních polí nebo přímo součinitel přestupu tepla α .

7.1.3 Radiace

Každé těleso je zdrojem elektromagnetického záření. Elektromagnetické záření má vlnový i částicový charakter a jednotlivé typy záření jsou rozlišeny vlnovou délkou.

Jestliže při dopadu zářivého toku na jiný objekt dochází k přeměně, hovoří se o tepelném záření. Záření se obecně šíří rychlostí, která je závislá na typu prostředí. Při úplné přeměně energie záření na teplo je hustota zářivého toku E_z (zářivost) rovna hustotě tepelného toku q . Zářivý tok Q_z je pak definován jako součin zářivosti a plochy S

$$Q_z = E_z \cdot S. \quad (38)$$

Při dopadu zářivého toku na povrch může dojít k:

- odrazu (reflektance),
- pohlcení (absorptance),
- průchodu zářivého toku tělesem (transmitance).

Jestliže se při dopadu na objekt přemění zářivý tok na tepelný tok, lze Stefan – Boltzmannův zákon [15] psát ve tvaru

$$q = \sigma_0 \cdot (T - T_0)^4. \quad (39)$$

σ_0 je Stefan – Boltzmannova konstanta dána hodnotou

$$\sigma_0 = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^2\text{K}^{-4}. \quad (40)$$

Pro nedokonalé zářiče je do vztahu (39) zahrnuta emisivita ε (poměrná zářivost), která nabývá hodnot od 0 (povrch nezáří) do 1 (dokonalý zářič)

$$q_0 = \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot (T - T_0)^4. \quad (41)$$

Hodnota emisivity je tabelována. Zahrnutím radiace do výpočtu je zavedena silná nelinearita (teplota je zde ve čtvrté mocnině), což zvyšuje náročnost úlohy.

7.2 Problematika řešení multifyzikálních problémů v prostředí Ansys Workbench

Vliv teplotních polí v provoalku na vzniklou napjatost a deformace válců bude analyzován v programu Ansys Workbench.

Přenos tepla závisí na vzniklé kontaktní ploše a na velikosti kontaktního tlaku. Jelikož nejsou tyto hodnoty předem známy a v průběhu analýzy se mění, musí být provedena zároveň statická a teplotní analýza.

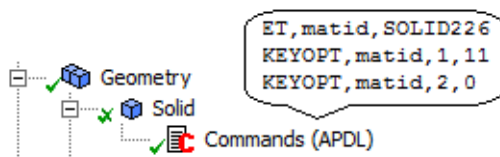
V programu Ansys Workbench je nutné takový typ úlohy řešit pomocí modulu *Static Structural*, ve kterém je zapotřebí využít APDL příkazy pro zajištění multifyzikální úlohy.

Statická úloha pracuje s objemovými elementy, které pomocí APDL příkazů lze předefinovat na takové prvky, které dokáží řešit multifyzikální problémy. Předdefinování elementů závisí na typu elementu, který je primárně na geometrii využít jen pro statickou strukturální analýzu. *Tabulka 10* charakterizuje změnu elementů a využitelnost v jednotlivých typech analýz.

Původní prvek	Nový prvek	Problematika	Typ úlohy
Hexa prvky	Solid 5	Termoelasticita	Statika Transientní analýza
Quad prvky	Plane 13		
Tetra prvky	Solid 98		
Quad prvky	Plane 223	Termoelasticita Termoplasticita	Statika Transientní analýza Harmonická analýza
Hexa prvky	Solid 226		
Tetra prvky	Solid 227		

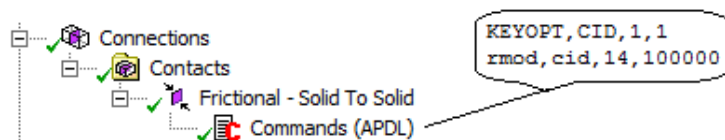
Tabulka 10: Typy prvků

Typ prvku se dále předefinuje s využitím APDL příkazu (*Obrázek 54*), kde je nutné příslušnými příkazy změnit typ prvku (*SOLID226*) a typ úlohy (*KEYOPT(1)=11*). Dále příkaz *KEYOPT(2)=0* vytváří silné strukturálně-tepelné vazby (případně strukturálně-difúzní).



Obrázek 54 – APDL příkaz (prvky, typ úlohy)

Pomocí APDL příkazů je nutné zajistit vedení tepla vzniklou kontaktní plochou (*Obrázek 55*).



Obrázek 55 – APDL příkaz (nastavení kontaktu)

$KEYOPT(1)=1$ zajišťuje, že jsou v kontaktní ploše vytvořeny jak strukturální, tak tepelné stupně volnosti. V kontaktní ploše je dále nutné definovat tzv. TCC („*Thermal Contact Conductance*“).

$$q = TCC \cdot (T_T - T_C), \quad (42)$$

kde q definuje tepelný tok vzniklou plochou, T_T teplotu plochy zvolenou jako „*target*“ a T_C teplotu plochy zvolenou jako „*contact*“.

Rozměr TCC závisí na typu použitého kontaktního prvku. Pro prvky CONTA178 je použita jednotka $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$, pro prvky CONTA171-175 je jednotkou $W \cdot K^{-1}$.

Teplotní okrajové podmínky v multifyzikální úloze je nutné na rozdíl od statického zatížení a uložení definovat pomocí APDL příkazů. Následující tabulka definuje označení jednotlivých teplotních okrajových podmínek. Tato označení definují typ okrajové podmínky. Např. D – definuje okrajovou podmínku do uzlů, SF – definuje plošné zatížení na uzly atd. *Tabulka 11* uvádí, kde musí být zadány teplotní okrajové podmínky.

Okrajová podmínka	APDL příkaz
Teplota	D
Konvekce	SF, SFE
Radiace	
Tepelný tok	F

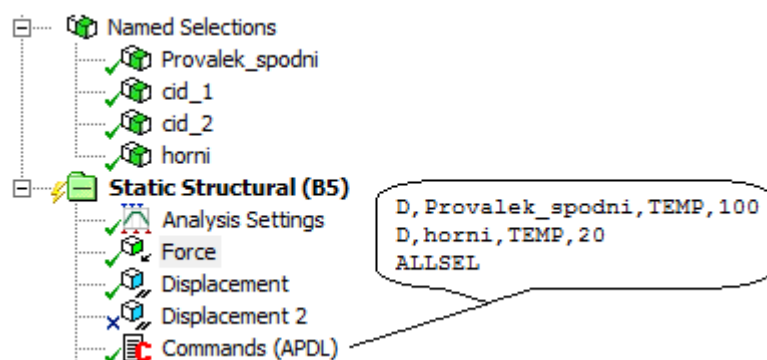
Tabulka 11: Aplikace okrajové podmínky

V kódu je nutné definovat typ okrajové podmínky. Z těch základních:

- Teplota – TEMP,
- Konvekce – CONV,
- Radiace – RAD.

Každá z uvedených okrajových podmínek je dána parametry. Např. TEMP – pouze teplotou, CONV – součinitelem přestupu tepla a teplotou proudícího média.

Okrajové podmínky jsou definovány na uzly (pomocí ploch), elementy (pomocí objemů). Tyto plochy (resp. objemy) si uživatel musí připravit jako „*Named Selection*“ s příslušným názvem a následně tento název do APDL kódu uvést (*Obrázek 56*).



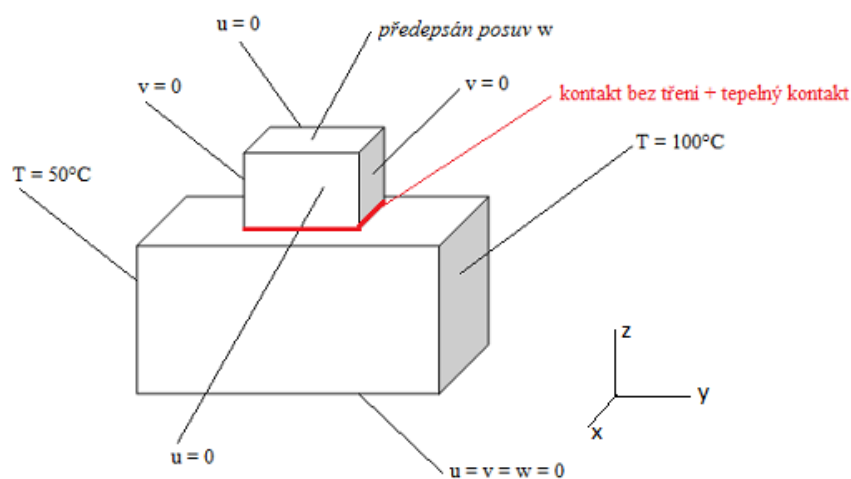
Obrázek 56 – APDL command (teplotní okrajové podmínky)

V takto nadefinované úloze je nyní možné řešit multifyzikální úlohu – statické a tepelné zatížení soustavy pomocí Ansys Workbench.

Správnost řešení je ověřena testovací úlohou v programu Ansys Workbench a v programu COMSOL Multiphysics. Testovací úlohou pak je potvrzena správnost výše uvedeného nastavení úlohy.

7.2.1 Testovací úloha

Testovací úlohu představují dvě kostky malých rozměrů, které jsou zatíženy statickou silou, vzniká mezi nimi kontakt bez tření a dále je na kostky předepsáno teplotní pole (Obrázek 57).



Obrázek 57 – Nastavení úlohy

Tabulka 12 charakterizuje materiál, referenční teplotu těles a hodnotu TCC.

Parametry úlohy	Hodnota
Youngův modul pružnosti [MPa]	210 000
Poissonovo číslo [-]	0,3
Hustota [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	7850
Součinitel teplotní délkové roztažnosti [K^{-1}]	$12\cdot 10^{-6}$
Součinitel přestupu tepla [$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]	60,5
Měrná tepelná kapacita [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]	434
TCC [$\text{W}\cdot\text{K}^{-1}$]	$1,0\cdot 10^8$
T_{ref} [$^{\circ}\text{C}$]	22

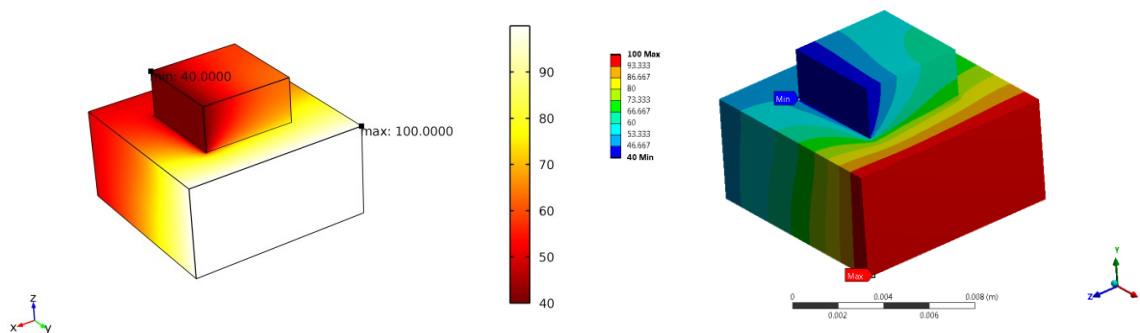
Tabulka 12: Parametry testovací úlohy

Ve výše uvedených softwarech byla vytvořena stejná síť konečných prvků a byly aplikovány okrajové podmínky (Obrázek 58).



Obrázek 58 – Konečno-prvková síť (vlevo COMSOL, vpravo ANSYS)

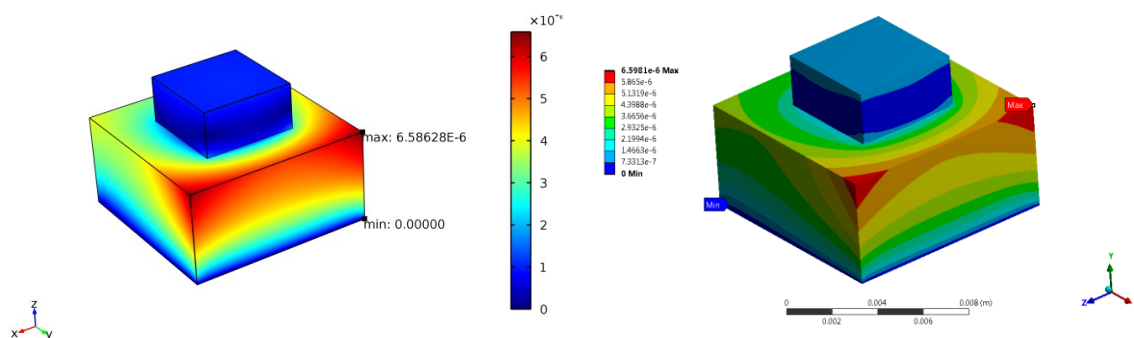
Následně je vyhodnoceno rozložení teplotního pole (Obrázek 59).



Obrázek 59 – Teplota [$^{\circ}\text{C}$] (vlevo COMSOL, vpravo ANSYS)

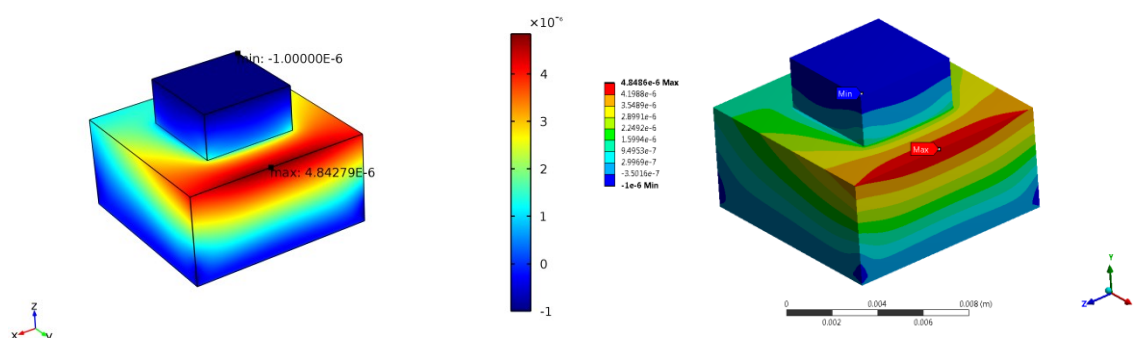
Rozložení teplot je v obou případech totožné. Z výsledků je rovněž patrné, že je správně nadefinován teplotní kontakt pomocí APDL příkazů a je jim přenášena teplota.

Obrázek 60 zobrazuje vzniklé celkové posuvy.



Obrázek 60 – Celkový posuv [m] (vlevo COMSOL, vpravo ANSYS)

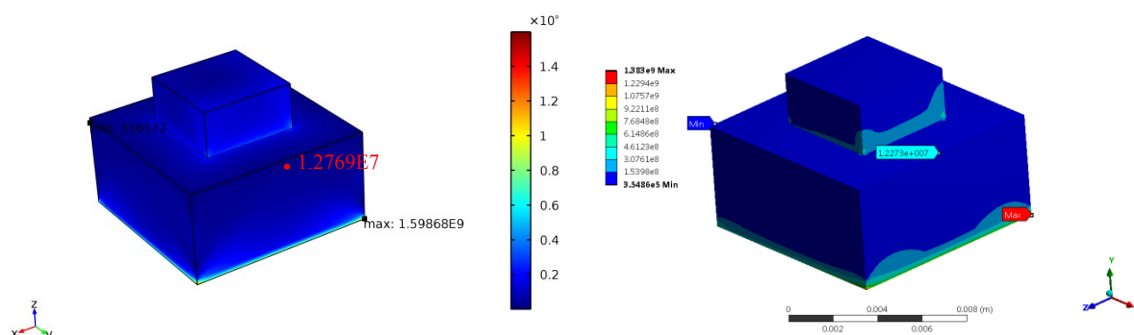
U posuvů lze pozorovat mírný rozdíl maximálních hodnot. Relativní chyba maximální hodnoty celkového posuvu je 0,2 %. Při vykreslení posuvů v předepsaném směru je patrné, že hodnoty jsou téměř totožné (Obrázek 61).



Obrázek 61 – Posuv v předepsaném směru [m] (vlevo COMSOL, vpravo ANSYS)

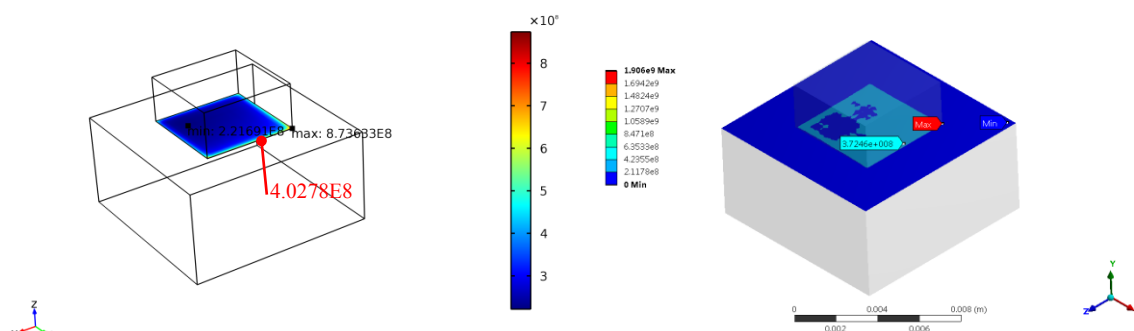
Při srovnání výsledků redukovaného napětí dle HMH již dochází k mírným rozdílům hodnot (Obrázek 62). Ve sledovaném bodě dochází k relativní chybě téměř 4 %.

Relativní chyba je dána rozdílným algoritmem výpočtu napětí na prvku.



Obrázek 62 – Redukované napětí dle HMH [Pa] (vlevo COMSOL, vpravo ANSYS)

V případě kontaktního tlaku rozdíl ještě narůstá a relativní chyba dosahuje hodnoty 7,5 % (Obrázek 63).



Obrázek 63 – Kontaktní tlak [Pa] (vlevo COMSOL, vpravo ANSYS)

Rozdíl vzniklý v hodnotách kontaktního tlaku může být způsoben rozdíly v kontaktních algoritmech a přesnosti řešení. Mírná změna v rozložení kontaktních tlaků pak vede ke změně napjatosti a promítne se v rozdílných hodnotách redukovaného napětí dle HMM.

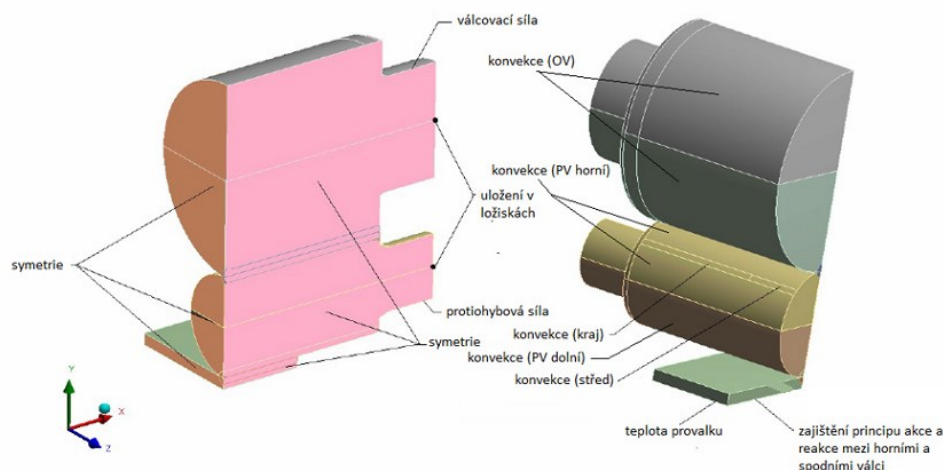
Primárním úkolem testovací úlohy bylo potvrzení správnosti řešení strukturálně-teplotní úlohy pomocí APDL příkazů v softwaru Ansys Workbench. Řešení prokázalo správnost nastavení řešení multifyzikálního problému pomocí APDL příkazů.

7.3 Strukturálně-teplotní analýza prostorové soustavy

Strukturálně-teplotní úloha vnáší do řešeného problému navíc teplotní stupně volnosti oproti statické analýze. Vlivem vzniklých teplotních polí v soustavě dochází ke změně mechanických vlastností materiálů. Zahrnutí teplotně závislých materiálových modelů do výpočtu vytváří nelineární úlohu z důvodu závislosti matice tuhosti na teplotě. Spolu se zahrnutím kontaktních podmínek jsou v úloze nyní dva typy nelinearit.

Software Ansys Workbench pro řešení strukturálně-teplotní úlohy vyžaduje užít přímý řešič, který při řešení úlohy na původním konečno – prvkovém modelu vytváří 33 mil. rovnic. Z důvodu hardwarového omezení takto rozsáhlou úlohu není možné řešit.

Pro řešení strukturálně – teplotní úlohy je vytvořen výpočtový model s výrazně hrubší sítí. Počet elementů v kritické oblasti je přibližně 10x menší než u původní úlohy. V kritické oblasti jsou využity kvadratické prvky.



Obrázek 64 – Okrajové podmínky (strukturálně – teplotní analýza)

Okrajové podmínky (Obrázek 64) pro řešení statické úlohy jsou uvedeny v *kap. 6*. Analýza je provedena pro mezní stav zatížení.

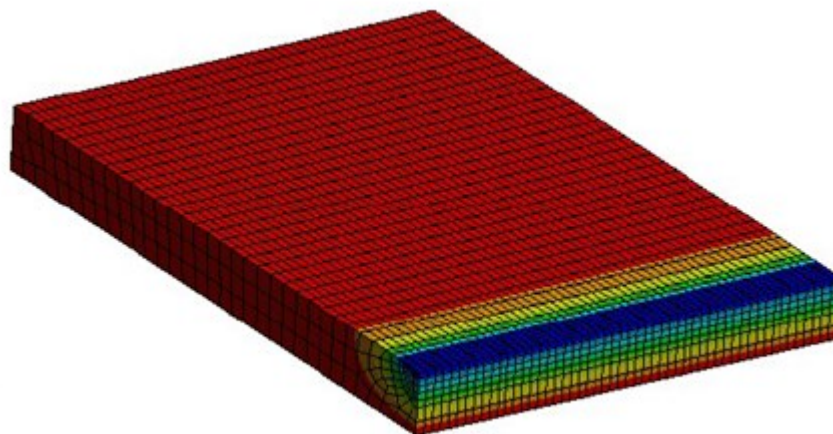
Teplotní okrajová podmínka aplikovaná na střednicovou rovinu provalku je převzata z vřlcovacího protokolu pro první průval.

Okrajové podmínky charakterizující konvekci byly pro úlohu odhadnuty z literatury [14]. Dále z odhadů založených na zkušenosti zástupců společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. Jejich velikosti jsou uváděny v [17].

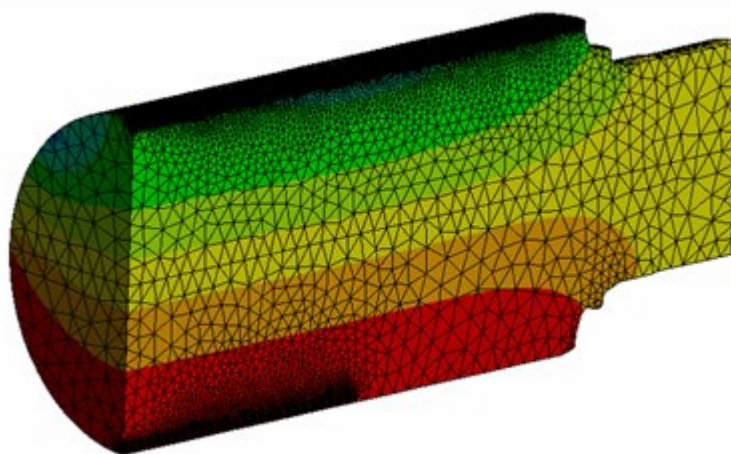
Vliv radiace je v úloze zanedbán.

Rozložení teplotních polí v provalku je vykreslen v *Obrázku 65*. V oblasti kontaktu je patrný vliv teplotního toku mezi pracovním vřlcem a provalkem. *Obrázek 66* vykresluje teplotní pole v pracovním vřlci a *Obrázek 67* teplotní pole v opěrném vřlci. V opěrném vřlci se teplota ustálila na hodnotě uváděné v [17]. Přestupem tepla z pracovního vřlce je ovlivněna jen blízká vrstva okolo kontaktní plochy.

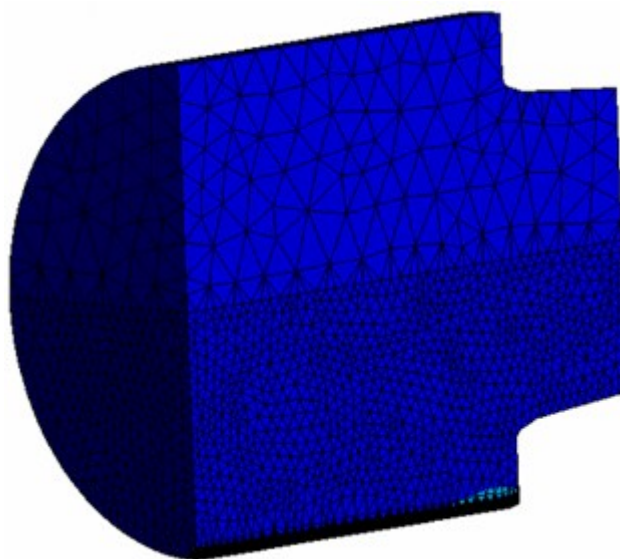
Ve všech obrázcích lze pozorovat diskretizaci modelů. Je patrné, že diskretizace v kritických oblastech není dostatečně kvalitní. Výsledky proto musí být brány s uvažováním vzniklých nepřesností vlivem hrubší sítě.



Obrázek 65 – Teplotní pole v provalku

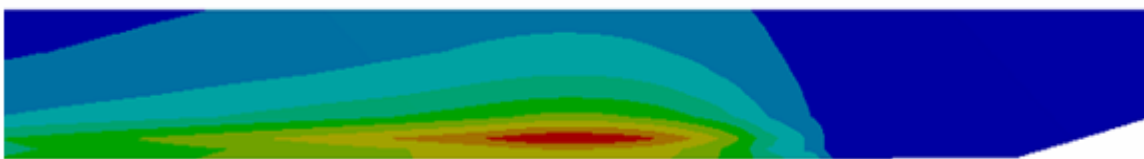


Obrázek 66 – Teplotní pole v pracovním válci



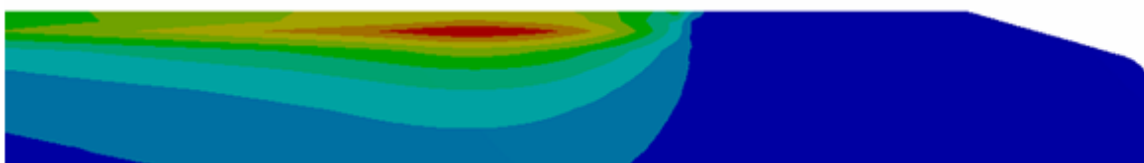
Obrázek 67 – Teplotní pole v opěrném válci

Z Obrázku 68 je patrné, že oproti soustavě, která není zatížena teplotními vlivy, došlo k nárůstu maximální hodnoty HMH napětí o 17 %.



Obrázek 68 – HMH napětí se zahrnutím teplotního vlivu (OV)

V pracovním válci dochází k nárůstu maximální hodnoty HMH napětí o 3 % (Obrázek 69).



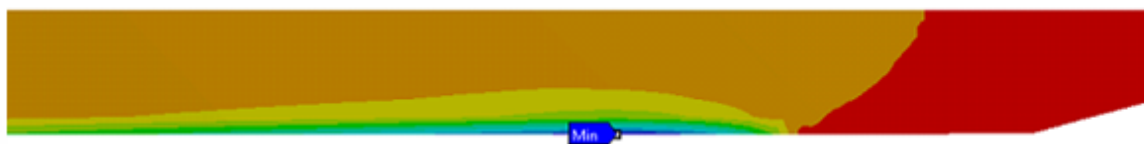
Obrázek 69 – HMH napětí se zahrnutím teplotního vlivu (PV)

Zahrnutí teplotního vlivu do úlohy způsobuje nárůst kontaktního tlaku (Obrázek 70) při interakci pracovního a opěrného válce o 35 %. Nárůst kontaktního tlaku způsobuje změnu napjatosti ve válcích a růst maximální hodnoty HMH napětí.

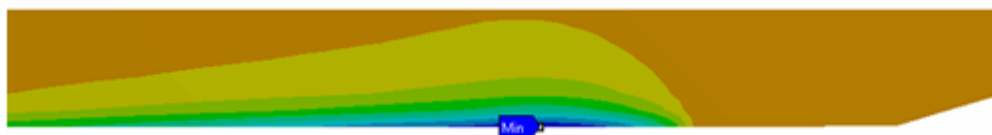


Obrázek 70 – Kontaktní tlak se zahrnutím teplotního vlivu (interakce PV – OV) [MPa]

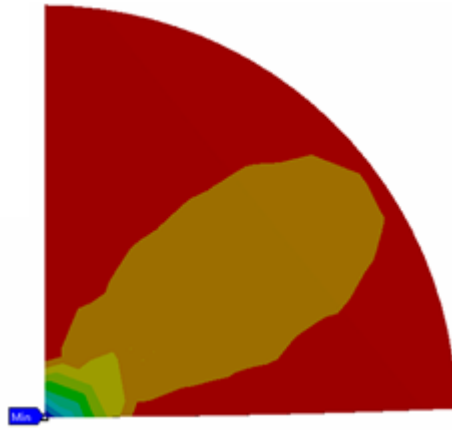
V Obrázcích 71 – 73 jsou vykresleny normálové složky tenzoru napětí v kritické oblasti OV, které mají největší vliv na velikost redukovaného napětí.



Obrázek 71 – Normálové napětí v ose x (OV) [MPa]



Obrázek 72 – Normálové napětí v ose y (OV) [MPa]



Obrázek 73 – Normálové napětí v ose z (OV – řez v místě minima σ_z) [MPa]

Z uvedených analýz je patrné, že vlivem nárůstu maximální hodnoty kontaktního tlaku došlo k nárůstu maximálních hodnot normálových složek napětí ve směru y a z . Normálová složka napětí ve směru y vzrostla o 11 % a ve směru z o 3 %. Normálová složka napětí ve směru x naopak o 4 % klesla.

Vlivem změny mechanických vlastností v závislosti na teplotě dochází k většímu průhybu osy opěrného válce. S rostoucí teplotou klesá modul pružnosti materiálu, což vede ke snížení tuhosti a větším deformacím válců.

Z uvedeného rozboru je patrné, že rozložení teplotních polí ve válcích způsobuje nárůst maximálních hodnot napěťových složek.

Hodnoty všech uvedených průběhů jsou uvedeny v [17].

8 Optimalizace tvarového zakončení opěrného válce

Tvarové zakončení opěrného válce představuje konstrukční vrub. Konstrukční vruby vznikají úmyslně za jistým účelem, představují je např. zaoblení, díry, zápichy aj. Tyto vruby úzce souvisí například s funkcí součásti, či s technologií výroby.

Konstrukční vruby nebo také konstrukční koncentrátoři napětí způsobují v tělese náhlou změnu silového toku, čímž dochází ke změně napjatosti. Typickým příkladem je deska s kruhovým otvorem namáhána jednoosým tahem. Vlivem konstrukčního vrubu dochází ke změně rozložení napětí okolo vrubu, zatímco v dostatečné vzdálenosti od vrubu je hodnota napětí rovna tzv. nominálnímu napětí, které představuje hodnotu normálového napětí pro geometrii desky při tahovém zatížení bez změny průřezu (předpokládá rovnoměrné rozložení napětí).

Velikost maximálního napětí, které vzniká v okolí konstrukčního vrubu, se v praxi vyjadřuje pomocí teoretického součinitele koncentrace napětí α_t , který je definován jako podíl maximálního a nominálního napětí.

Jestliže dojde ke snížení maximální hodnoty redukovaného napětí dle HMM (snížení velikosti součinitele koncentrace napětí), dojde také ke zvýšení životnosti válců.

Při návrhu tvarového zakončení opěrného válce je vycházeno z požadavků VÍTKOVICE STEEL, a.s. a dále jsou testovány úpravy stávajícího typu tvarového zakončení (změny rozměrů) za účelem snížení extrémních hodnot napětí.

8.1 Úvod do optimalizačních metod

Optimalizace je proces hledání takového řešení problému ze všech možných přípustných řešení, které nejlépe splňuje jisté, předem vymezené požadavky [16].

Optimalizační proces je charakterizován

- cílem (čeho má být dosaženo),
- omezeními (musí být splněny při hledání optima),
- parametry (nastavují se na základě hledání optima),
- omezeními parametrů.

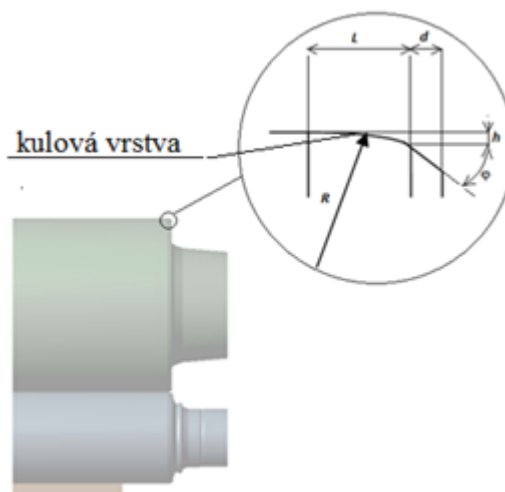
Soubor parametrů, které jsou předmětem optimalizačního procesu, se nazývá návrhové proměnné a cílová funkce definuje kritérium, dle kterého je rozhodnuto, zda jsou parametry nastaveny vhodně či ne. Návrhové proměnné jsou pak proměnné v cílové funkci [16].

V řešené úloze cílovou funkcí představuje minimum redukovaného napětí dle HMM, kterého je snahou dosáhnout na základě změny návrhových proměnných definovaných geometrií tvarového zakončení OV.

Při optimalizaci bude využito inženýrského přístupu, kdy jsou návrhové proměnné upravovány na základě inženýrského zhodnocení výsledků.

8.2 Optimalizace tvarového zakončení opěrného válce

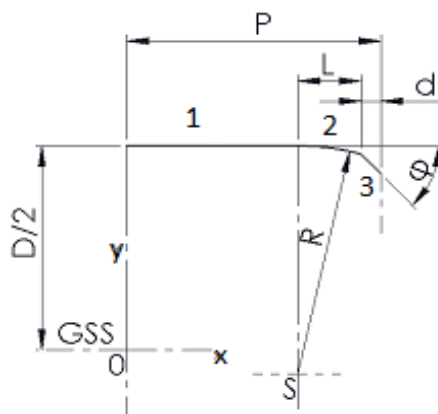
V současné době společnost VÍTKOVICE STEEL, a.s. používá tvarové zakončení uvedené dle *Obrázku 74*.



Obrázek 74 – Geometrie tvarového zakončení OV, současný stav

Při modifikaci návrhových proměnných je nutné znát, které parametry jsou závisle proměnné, a které naopak nezávislé proměnné. Pro určení závislosti (resp. nezávislosti) proměnných, budou odvozeny funkce popisující geometrii tvarového zakončení.

Funkce popisující geometrii tvarového zakončení budou odvozeny vůči GSS. Rovnice jsou postupně odvozeny pro část 1, poté 2 a 3 (*Obrázek 75*).



Obrázek 75 – Schéma tvarového zakončení

Část 1 je popsána konstantní funkcí definované v uvedeném intervalu.

$$f(x) = \frac{D}{2}, \quad x \in \langle 0; P - L - d \rangle. \quad (43)$$

Oblouk popisující část 2 tečně navazuje na část 1. Tečnost funkce popisující část 2, tak určuje polohu středu oblouku v ose x . Poloha středu oblouku v ose y je definovaná rozdílem poloměru válce a poloměru oblouku

$$[x - (P - L - d)]^2 + \left[y - \left(\frac{D}{2} - R\right)\right]^2 = R^2. \quad (44)$$

Po úpravě

$$y^2 - 2 \cdot \left(\frac{D}{2} - R\right) \cdot y - q(x) = 0 \quad (45)$$

$$q(x) = -x^2 + (P - L - d) \cdot (2x + L + d - P) - \left(\frac{D}{2} - R\right)^2 + R^2 \quad (46)$$

pro $x \in \langle P - L - d; P - d \rangle$.

Hodnota y je závislá na proměnné x definující velikost členu $q(x)$.

Jelikož jde o kvadratickou rovnici (45), k řešení musí být přidána podmínka definující jednoznačnost řešení. V uvedeném případě postačuje podmínka zajišťující, že hodnota $y > 0$.

Část 3 navazuje na část 2 pod předepsaným úhlem α . Jde o část přímky popsanou klesající lineární funkcí, definovanou v uvedeném intervalu.

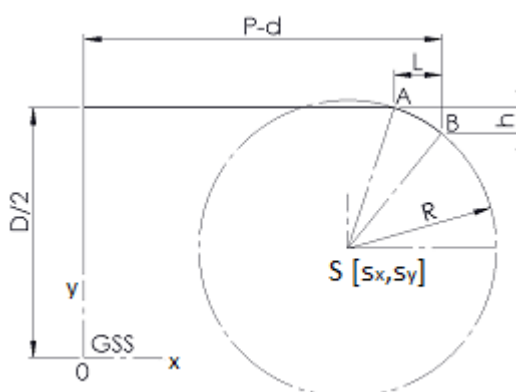
$$f(x) = -\operatorname{tg}(\varphi) \cdot x + b(P - d) \quad (47)$$

pro $\langle P - d; P \rangle$.

Člen $b(P - d)$ je dán vyčíslením vztahu

$$b(P - d) = y^2 - 2 \cdot \left(\frac{D}{2} - R\right) \cdot y - q(P - d) + \operatorname{tg}(\varphi) \cdot (P - d). \quad (48)$$

V případě, že kruhová výseč nenavazuje tečně (Obrázek 76), je nutné vztahy (44) – (46) modifikovat. Pomocí okrajových podmínek v bodě A a B aplikovaných na obecnou rovnici kružnice (49).



Obrázek 76 – Kruhová výseč bez tečné návaznosti

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 \quad (49)$$

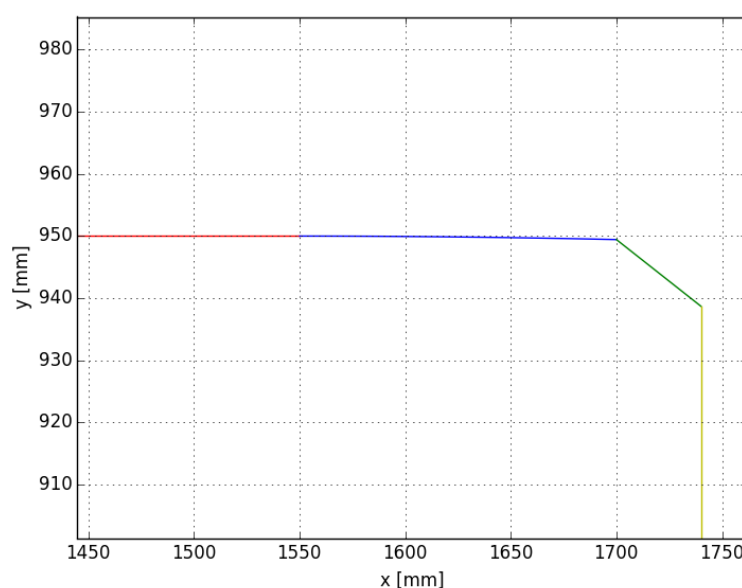
$$[(P - L - d) - s_x]^2 + \left(\frac{D}{2} - s_y\right)^2 = R^2 \quad (50)$$

$$[(P - d) - s_x]^2 + \left[\left(\frac{D}{2} - h \right) - s_y \right]^2 = R^2 \quad (51)$$

řešením nelineární soustavy rovnic (50), (51) je dána poloha středu oblouku $S[s_x, s_y]$.

Rovnicemi (43-51) je definovaná geometrie tvarového zakončení OV a jsou z nich patrné nezávislé proměnné (tzv. *návrhové proměnné*), které je možné dále optimalizovat (parametry L, d, φ, R , případně h).

Korektnost uvedených rovnic byla testována skriptem sepsaným v programovacím jazyku *Python* (Obrázek 77).



Obrázek 77 – Testování korektnosti uvedených rovnic

8.3 Modifikace tvarového zakončení OV dle požadavků VÍTKOVICE STEEL, a.s.

Z diskuze se zástupci společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s., byly navrženy čtyři základní modifikace, které musí být ověřeny výpočty. Optimalizace bude provedena pro běžně používané zatížení vybrané z protokolu válcování.

Navržené parametry geometrie a výsledné hodnoty jsou uvedeny v [17].

Nejvíce ovlivněnou složka tenzoru napětí představuje normálové napětí ve směru y . Změna normálového napětí v uvedeném směru souvisí se změnou velikosti kontaktního tlaku v důsledku modifikace geometrie tvarového zakončení OV.

Z výsledku (viz [17]) je patrné, že geometrické modifikace nevedou ke zlepšení stávající situace.

8.4 Modifikace tvarového zakončení

V následujících analýzách je snahou nalézt optimální geometrii pomocí inženýrské optimalizace tvarového zakončení. Průběžné výsledky analýz definují směr, kam by se mohly při určité změně daného parametru výsledky posunout. Jde o intuitivní řešení konkrétního problému, kdy je řešitel nucen ze získaných dat, informací a analýz stanovit parametry tak, aby bylo dosaženo požadovaného řešení, tedy zlepšení stávající situace (zjednodušeně – snížení redukovaného napětí dle HMM).

V první fázi je ověřen předpoklad, že pro zlepšení chování soustavy (snížení maximální hodnoty redukovaného napětí dle HMM) je vhodnější pokud kulová vrstva navazuje na válcovou část plynule (tečně). Pro potvrzení domněnky je využita geometrie jednoho z návrhu a je změněna velikost parametru h . Důkaz tedy bude proveden sporem.

Z výsledků [17] je patrné, že došlo k výraznému nárůstu velikosti redukovaného napětí dle HMM, což plyne z razantního zvýšení hodnoty kontaktního tlaku. Pro další návrhy je tedy potvrzen předpoklad o snaze plynulého přechodu válcové a kulové části tvarového zakončení.

V druhé fázi je ověřena domněnka, která předpokládá, že by mohlo dojít ke snížení namáhání válců, jestliže okrajová část opěrného válce bude více uzavírat mezeru mezi pracovním a opěrným válcem.

Při ověření je využita původní geometrie, kdy je postupně zvětšován parametr R (poloměr zaoblení kulové vrstvy), čímž se mezera postupně uzavírá.

Přestože nedošlo u výsledných hodnot redukovaného napětí dle HMM ke snížení oproti původní hodnotě, lze výsledky považovat za potvrzení vysloveného předpokladu.

Nárůst hodnot redukovaného napětí je zde způsoben, již zmíněným vlivem plynulosti (resp. neplynulosti) přechodu jednotlivých geometrií (válcová plocha – kulová vrstva). Domněnku potvrzuje také nárůst sledovaných hodnot při zvýšení poloměru křivosti kulové plochy. Aby došlo k plynulému přechodu, musely by v obou případech růst také hodnoty parametru h (v případě tečnosti je parametr h závislou proměnnou), nicméně ty zůstávají neměnné a blíže k plynulosti je kombinace parametrů s menším poloměrem křivosti.

Z výše zmíněných předpokladů lze učinit závěr, že plynulost změny geometrie může vést k požadovanému cíli – snížení maximální hodnoty HMM napětí.

Následující výpočty respektují předpoklad o plynulém přechodu geometrie. Parametr h je již závislou proměnnou, díky využití tečnosti přechodu z válcové plochy na kulovou vrstvu.

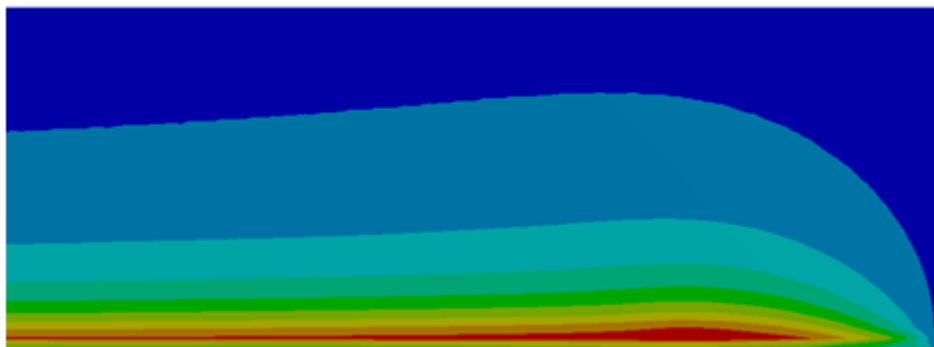
Výsledky analýz jsou uvedeny v [17].

Z tenzoru je zřejmé, že navrhovaná změna geometrie uvedená v [17] vedla ke snížení všech normálových složek napětí.

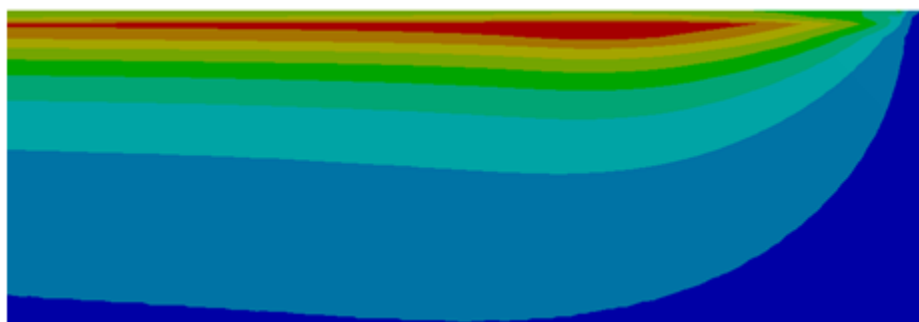
Nejvhodnější modifikace je dále testovaná na mezní stav zatížení soustavy a jsou porovnány vzniklé maximální hodnoty sledovaných veličin s původním stavem.

9 Posouzení mezního stavu optimalizovaného tvaru zakončení OV

Velikosti vzniklé napjatosti (Obrázek 78-79) jsou uvedeny v [17].



Obrázek 78 - HMH napětí (OV, optimalizovaný tvar)



Obrázek 79 - HMH napětí (PV, optimalizovaný tvar)

Vlivem změny geometrie tvarového zakončení OV došlo při posouzení mezních stavů ke snížení maximální hodnoty HMH napětí o 4 %. Změna tvarového zakončení má rovněž vliv na rozložení a maximální hodnoty kontaktního tlaku (Obrázek 80), které ovlivňují vzniklou napjatost v pracovním válci. Při dané změně dochází také k poklesu maximální hodnoty kontaktního tlaku o 4 % a k poklesu maximálního HMH napětí v PV o 4 %.



Obrázek 80 - Kontaktní tlak (interakce PV – OV, optimalizovaný tvar)

Z uvedených poznatků lze učinit závěr, že navrhovaná úprava povede ke snížení maximální hodnoty HMH napětí, čímž dojde ke zvýšení odolnosti válců vůči opotřebení.

10 Závěr

Téma práce vzniklo na základě požadavků společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. a cílem práce byla napjatostní a deformační analýza okrajové části OV stolice kvarto. Dalším požadavkem bylo nelézt takové tvarové zakončení OV, aby došlo ke snížení maximálního HMH napětí.

První část práce slouží k seznámení se s problematikou technologie válcování a s typy válcovacích stolic. Dále jsou rozebrány parametry válcovací stolice společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s.

Práce se zabývá řešením kontaktních úloh pomocí analytických a numerických metod. V úvodu této části se práce zabývá základními principy a výhodami užitých metod pro řešení kontaktních úloh (*Lagrangeova metoda*, *Rozšířená Lagrangeova metoda* a *Pokutový přístup*).

K řešení prostorových úloh pomocí numerických metod jsou využity softwary společnosti *MSC Software* a *Ansys, Inc.* Aby bylo dosaženo kvalitních výsledků, je nutné, aby uživatel znal principy řešení kontaktních úloh v uvedených softwarech. K seznámení se s uvedenou problematikou byl proveden rozbor nastavení kontaktních analýz.

K analytickému řešení kontaktu dvou válců je využita Hertzova teorie, která je následně porovnaná s numerickým řešením pomocí metody konečných prvků v softwarech *Ansys Workbench* a *COMSOL Multiphysics*. V této části jsou zároveň porovnány metody řešení 2D kontaktních úloh v softwaru *Ansys Workbench*.

Vlivem tvarového zakončení OV dochází ke vzniku koncentrátoru napětí. Aby bylo možné popsat vzniklou napjatost, je nutné vytvořit prostorový výpočtový model. Sít' konečných prvků musí být dostatečně jemná, aby byla schopna zachytit malé změny v napjatosti způsobené nově navrženým tvarovým zakončením.

Jakmile byla vytvořena kvalitní sít' konečných prvků, byly provedeny studie vlivu velikosti modulu pružnosti provalku na dosažené výsledky. Provalek je před zahájením válcovacího procesu zahřát na požadovanou teplotu, která se pohybuje přibližně v rozmezí 800 °C – 1100 °C. Pro takto vysoké teploty je obtížné přesně určit velikost modulu pružnosti. Během válcování dochází mezi OV a PV (resp. PV a provalkem) ke tření, jehož velikost se pohybuje v určitém rozsahu hodnot. Proto byla provedena studie vlivu velikosti součinitele tření na dosažené výsledky. Z obou provedených studií je patrné, že velikosti uvedených veličin mají zanedbatelný vliv na řešení.

V následující fázi byly provedeny studie porovnávající užití kontaktní metody. Z důvodu náročnosti úlohy byla ze studie vyřazena Lagrangeova metoda, která je vhodná

spíše pro 2D nebo menší 3D úlohy. Výsledky dosažené Pokutovým přístupem a Rozšířenou Lagrangeovou metodou byly téměř shodné. Za nejvhodnější metodu pro řešení dané úlohy byl označen Pokutový přístup, jehož výpočtový čas byl o 22 % kratší než Rozšířená Lagrangeova metoda.

S využitím uvedených poznatků byla provedena analýza mezních stavů soustavy. Analýza byla provedena pro maximální a minimální průměry válců s aplikací maximální možné síly. Z provedených analýz bylo patrné, že při uvedené velikosti zatížení maximální HMH napětí v PV překročí mezní hodnoty. OV při mezním stavu zatížení vyhoví.

Vlivem rozehrátého provalku a interakcí jednotlivých členů soustavy dochází k přenosu tepla. Rozložení teplotního pole v tělesech ovlivňuje jejich napjatost, proto je provedena strukturálně-teplotní analýza, která má za cíl vzniklou napjatost popsat. Z důvodu využití APDL příkazů při řešení multifyzikálního problému byla vytvořena testovací úloha, a ta potvrdila správnost výpočetního postupu.

Vlivem rozložení teplotních polí ve válcích došlo k nárůstu HMH napětí o 17 % v OV a o 3 % v PV. Z důvodu závislosti mechanických vlastností na teplotě došlo ke snížení tuhosti válců, což vedlo ke zvýšení průhybu válců oproti stavu, kdy je soustava zatížena jen mechanickými silami.

V poslední části práce je provedena optimalizace tvarového zakončení OV za účelem snížení maximální hodnoty HMH napětí. První část optimalizace vyplývá z požadavků zástupců společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. a dále je využito inženýrského přístupu k optimalizaci tvarového zakončení. Vlivem navrhované změny geometrie tvarového zakončení opěrného válce došlo při posouzení mezních stavů ke snížení maximální hodnoty HMH napětí o 4 %.

Obsah práce s uvedením geometrických parametrů, materiálových parametrů, zatěžujících sil a dosažených výsledků je na přání společnosti VÍTKOVICE STEEL, a.s. neveřejný a je zařazen do technické zprávy [17].

11 Literární zdroje

- [1] LENERT, Jiří. Úvod do metody konečných prvků. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 1999. ISBN 80-7078-686-8.
- [2] KUBEŠ, Josef a VAŠÍČEK, Emil. Technologie I. Třetí vydání. Spálená 51, Praha 1: Státní nakladatelství technické literatury, 1961.
- [3] Valcovanie: Vysokoškolská učebnice pre skupinu študentov odboru hutníctvo. Bratislava: Alfa, 1991. ISBN 8005007299.
- [4] VÚHŽ - Odstředivé lití (+audio) - YouTube. YouTube [online]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=sP3kce4MgJQ>
- [5] ELFMARK, Jiří. Tváření kovů. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1992. Technický průvodce. ISBN 80-03-00651-1.
- [6] Bolzano | Přehled vlastností oceli S355J2 (dříve S355J2G3). Bolzano | Úvod [online]. Copyright © 2017 Bohdan Bolzano, s.r.o. [cit. 15.05.2017]. Dostupné z: <http://www.bolzano.cz/cz/technicka-podpora/technicka-prirucka/tycove-oceli-uhlikove-konstrukcni-a-legovane/nelegovane-konstrukcni-oceli-podle-en-10025/prehled-vlastnosti-oceli-s355j2drive-s355j2g3>
- [7] [online]. Dostupné z: [http:// engineeringtoolbox.com](http://engineeringtoolbox.com)
- [8] The Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy, Construction. Architecture Section [online]. Copyright © [cit. 15.05.2017]. Dostupné z: <http://www.bipcons.ce.tuiasi.ro/Archive/54.pdf>
- [9] FUSEK, Martin a Radim HALAMA. *MKP a MHP - interaktivní studijní materiál* http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mkpamhp_obr.pdf. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
- [10] JOHNSON, K. *Contact mechanics*. 9 vydání. Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 451 s. ISBN 05-212-5576-7.

- [11] [online]. Dostupné z: http://ANSYS_13.0_Introduction_to_contact.pdf
- [12] MSC Nastran Contact | ESTEQ. ESTEQ [online]. Copyright © Copyright ESTEQ [cit. 15.05.2017]. Dostupné z: <https://esteq.co.za/2015/12/15/msc-nastran-contact/>
- [13] UMaine Earth Sciences [online]. Copyright © [cit. 15.05.2017]. Dostupné z: http://www.geology.um.maine.edu/user/scott_johnson/share/MarcDocs/MarcDocs/docs/vola/vola.pdf
- [14] Konference [online]. Copyright © [cit. 15.05.2017]. Dostupné z: <http://konference.tanger.cz/data/metal2007/sbornik/Lists/Papers/142.pdf>
- [15] [online]. Dostupné z: <http://ottp.fme.vutbr.cz/~pavelek/termo/>
- [16] Výukové materiály | Matematika pro inženýry 21. století [online]. Copyright © [cit. 15.05.2017]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metody_optimalizace_obr.pdf
- [17] BZONEK, J. *Napjatostní a deformační analýza okrajové části opěrného válce stolice kvarto*, *Technická zpráva*. OSTRAVA, VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2017, 88 s.

12 Použité obrázky

- [I] http://www.ksp.tul.cz/cz/kpt/obsah/vyuka/skripta_tkp/sekce/02-valcovani/06-valcovaci%20stolice.JPG
- [II] VÍTKOVICE STEEL, a.s., <http://www.vitkovicesteel.com/>